Ф. КЛЕЙН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ВЫСШЕЙ

ГЕОМЕТРИЯ

II

Ф. КЛЕЙН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА
С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ВЫСШЕЙ

Лекции, читанные в Гёттингенском университете

ТОМ ВТОРОЙ

ГЕОМЕТРИЯ

Перевод с немецкого Д. А. КРЫЖАНОВСКОГО
Под редакцией В. Г. БОЛТЯНСКОГО

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.151.0
К48
УДК 514.11 (023)

FELIX KLEIN

ELEMENTARMATHEMATIK VOM HÖHEREN STANDPUNKTE AUS ZWEITER BAND

GEOMETRIE

Dritte Auflage

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1925

Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах. Т. 2. Геометрия: Пер. с нем. Под ред. В. Г. Болтянского.—2-е изд.—М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.—416 с.

Книга выдающегося немецкого математика Феликса Клейна занимает особое место в популярной литературе по математике. Она в доходчивой и увлекательной форме рассказывает о тонких математических понятиях, о методике преподавания математики в школе (средней и высшей), об интересных фактах из истории науки, о собственных взглядах автора на математику и ее роль в прикладных вопросах.

Второй том посвящен вопросам геометрии — той науки, в развитие которой Ф. Клейн внес особенно заметный вклад. Автор мастерски, в изящной популярной форме, знакомит читателя с вопросами дифференциальной геометрии, неевклидовыми геометриями и другими вопросами.

1-е изд.—1934 г.

Для студентов-математиков, преподавателей, научных работников и просто любителей математики.

К $\frac{1702040000—141}{053(02)\text{-}87}$ 42-87

ОГЛАВЛЕНИЕ

О ПРЕПОДАВАНИИ ГЕОМЕТРИИ

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В предисловии к первому тому настоящих лекций (арифметика, алгебра, анализ) я выразил сомнение в том, сможет ли второй том, посвященный геометрии, появиться так скоро. Однако его уже удалось обработать, в значительной степени благодаря энергии г-на Геллингера, что я охотно отмечаю.

Относительно происхождения и цели всей этой серии лекций я не имею прибавить ничего особенного к тому, что было сказано в предисловии к первому тому. Но представляется, пожалуй, необходимым сказать несколько слов о новой форме, которую принял этот второй том.

Действительно, эта форма совершенно иная, чем в первом томе. Я решил дать, прежде всего, общий обзор всей области геометрии в том объеме, который я считаю желательным для всякого *учителя* средней школы. Поэтому соображения, относящиеся к *преподаванию* геометрии, отошли на задний план, но зато они даны в связной форме в конце, поскольку оставалось место.

При описанном изменении в расположении материала в известной степени сыграло свою роль желание избежать повторения одной какой-нибудь слишком стереотипной формы. Но можно привести и более серьезные внутренние основания. Мы не имеем по геометрии таких цельных учебников, соответствующих общему состоянию науки, какими мы обладаем по алгебре и анализу благодаря наличию служащих

образцом французских курсов. Вместо этого мы встречаем изложение то одной, то другой стороны нашего многообъемлющего предмета в соответствии с их разработкой той или другой группой исследователей. В противоположность этому казалось с точки зрения преследуемых мною педагогических и общенаучных целей существенно важным попытаться дать более целостное суммарное изложение.

Заканчиваю пожеланием, чтобы оба уже теперь готовых взаимно дополняющих друг друга тома «Элементарной математики с точки зрения высшей» встретили в учительском мире такое же дружеское внимание, которое имели лекции по вопросам организации преподавания математики, изданные в прошлом году г-ном Шиммаком и мною.

Ф. Клейн

Гёттинген, Рождество 1908

ВВЕДЕНИЕ

Уважаемые слушатели!

Курс, к чтению которого я сегодня приступаю, должен составить непосредственное продолжение и дополнение курса, прочитанного мною в последнюю зиму. Теперь, как и тогда, моя цель заключается в том, чтобы все то, чем вы занимались в области математики за годы студенчества, поскольку оно может представить хотя бы какой-нибудь интерес для будущего учителя, свести воедино, а главное — разъяснить с точки зрения его значения для постановки школьного преподавания математики. Зимою я осуществил эту программу поочередно для *арифметики, алгебры и анализа*; в текущем семестре очередь за *геометрией*, которая тогда оставалась в стороне. При этом наши рассуждения должны быть понятны, конечно, и независимо от прошлого курса. Кроме того, я хочу несколько изменить также и самый тон всего курса в целом. На первом плане должен стоять теперь, я бы сказал, *энциклопедический* момент; вы должны получить *обзор всей области геометрии*, который даст вам готовые рамки для размещения в них всех отдельных сведений, приобретенных вами за время вашего обучения, чтобы держать их, таким образом, наготове для какого угодно употребления. И лишь после этого сам собою возникает также и *тот интерес к школьному преподаванию математики*, который зимою всегда служил для меня исходным пунктом.

Охотно отмечу еще, что во время пасхальных каникул 1908 г. здесь, в Гёттингене, состоялись каникулярные курсы для преподавателей математики и физики старших классов. На этих курсах я сделал сообщение о моем зимнем курсе, и в связи с ним,

а также с докладом профессора здешней гимназии Берендсена возникли очень интересные и живые прения по вопросу о реформе школьного обучения арифметике, алгебре и анализу и, в частности, о введении в школу дифференциального и интегрального исчислений. Участники курсов обнаружили при этом крайне отрадный интерес к этим вопросам, как и вообще к нашим стремлениям создать живую связь между университетом и школой. В направлении тех же стремлений должен воздействовать и мой теперешний курс. Будем надеяться, что он со своей стороны поможет устранению тех старых нареканий, которые нам постоянно — и, увы, часто вполне заслуженно — приходилось выслушивать со стороны школы: хотя университетское преподавание и дает много специальных знаний, тем не менее оно оставляет будущего учителя без всякой ориентировки относительно многих важных вещей общего характера, которыми он позже действительно мог бы воспользоваться.

Относительно *материала этих лекций* замечу только, что я, как и в моем прежнем курсе, вынужден буду предполагать по мере надобности, что вам известны те основные понятия из всех областей математики, которые сообщаются обыкновенно в других курсах, чтобы иметь возможность сделать ударение на *обзоре целого*. При этом я буду, конечно, каждый раз стараться настолько помочь вашей памяти краткими указаниями, чтобы вы без труда смогли вполне ориентироваться в литературе. Но, с другой стороны, я буду, как и в первой части, в гораздо большей степени, чем это обыкновенно делается, указывать на *историческое развитие науки*, на достижения ее великих основоположников. Такого рода разъяснениями я надеюсь содействовать, я бы сказал, вашему *общему математическому образованию*: наряду со знанием деталей, которое вы черпаете из специальных курсов, должно занять свое место понимание логических и исторических связей целого.

Разрешите сделать еще одно, последнее, замечание общего характера, чтобы избегнуть недоразумения, которое иначе могло бы, пожалуй, возникнуть в связи с внешним отрывом этой «геометрической» части моих лекций от первой «арифметической». Невзирая на этот отрыв, я выступаю здесь, как и во-

обще всегда в подобных курсах общего характера, поборником той тенденции, которую я охотнее всего обозначаю словами *фузионизм в преподавании арифметики и геометрии*, понимая при этом «арифметику» как область, к которой принадлежат не только учение о целых числах, но и вся алгебра и анализ. Другие, особенно в Италии, пользуются словом *фузионизм* для характеристики стремлений, ограничивающихся одною только геометрией. Дело в том, что с давних пор принято как в школе, так и в университете сперва излагать геометрию плоскости, а затем уже совершенно отдельно геометрию пространства, но при этом, к сожалению, геометрию пространства часто слишком урезывают, и благородная способность к пространственной интуиции, с которой учащиеся приходят в школу, утрачивается. В противоположность этому «фузионисты» хотят с самого начала одновременно трактовать плоскость и пространство рядом друг с другом, чтобы не начинать с искусственного ограничения нашего мышления двумя измерениями. Я присоединяюсь здесь и к этим стремлениям, но в то же время имею в виду, как сказано выше, еще далее идущий фузионизм: в прошлом семестре я постоянно оживлял абстрактные теории арифметики, алгебры и анализа чертежами и графическими методами, которые делают для иного излагаемые вещи гораздо более доступными и часто впервые позволяют понять, зачем ими занимаются; аналогично, я буду теперь с самого начала сопровождать пространственную интуицию, которая, конечно, должна занимать первое место, аналитическими формулами, которые в высшей степени облегчают точную формулировку геометрических фактов.

Как именно все это надо понимать, вы лучше всего увидите, если я сразу же обращусь к нашему предмету; тут в первую очередь мы должны будем заняться рассмотрением ряда простых геометрических основных образов.

ПРОСТЕЙШИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ

I. ОТРЕЗОК, ПЛОЩАДЬ, ОБЪЕМ КАК ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ[1])

Определение с помощью детерминантов; истолкование знаков. Вы видите уже из заголовка, что, следуя намерению придерживаться фузионистских точек зрения, я с самого начала одновременно трактую соответствующие друг другу величины на прямой, на плоскости и в пространстве. Но в то же время, в соответствии с более общей фузионистской тенденцией, мы для аналитической формулировки будем с самого начала принципиально пользоваться обычной *прямоугольной системой координат*.

Начнем с *отрезка*, лежащего на оси x; если концы этого отрезка имеют абсциссы x_1, x_2, то его *длина* равна $x_1 - x_2$, и эту разность можно, очевидно, записать в виде такого определителя:

$$(1,\ 2) = x_1 - x_2 = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Совершенно аналогично площадь треугольника, лежащего в плоскости x, y и имеющего вершины в точках *1*, *2*, *3* с координатами x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3, равна[2])

$$(1,\ 2,\ 3) = \frac{1}{1\cdot 2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Наконец, для *обема тетраэдра* с вершинами в точках *1*, *2*, *3*, *4* с координатами x_1, y_1, z_1; ...; x_4, y_4, z_4 имеем выражение

$$(1,\ 2,\ 3,\ 4) = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обыкновенно говорят, что длина, площадь, объем равны *абсолютному значению* (модулю) написанных в правых частях величин, тогда как наши формулы дают, кроме того, вполне *определенный знак* (плюс или минус), зависящий от той последовательности, в которой заданы точки. Примем за правило применять всюду в геометрии знаки, даваемые этими аналитическими формулами; в соответствии с этим мы должны спросить себя, какой геометрический смысл может иметь тот или иной знак при таких определениях величин геометрических образов.

В этом вопросе имеет большое значение то, как мы выбираем *прямоугольную координатную систему*, и поэтому мы теперь же условимся раз навсегда придерживаться в этом отношении одного определенного (разумеется, произвольного) соглашения. В случае *одного измерения* будем всегда считать положительную ось x направленною вправо[3]). *На плоскости* будем положительную ось x направлять вправо, а положительную ось y — вверх (рис. 1); если бы последняя была обращена вниз, то получилась бы существенно иная система координат, представляющая

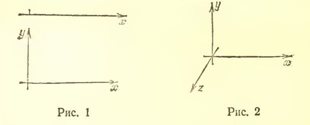


Рис. 1 Рис. 2

собой зеркальное отражение первой системы; эту вторую систему невозможно наложить на первую посредством непрерывного передвижения ее по плоскости, не выходя из плоскости в пространство. Наконец, пространственную систему координат считаем возникающей из нашей плоской системы путем присоединения к ней оси z с положительным направлением вперед (рис. 2); принятие противоположного направления оси z за положительное снова дало бы существенно иную систему координат, которую никаким непрерывным движением в пространстве

невозможно было бы наложить на первую систему *).

Придерживаясь постоянно этих соглашений, мы найдем истолкование знаков правых частей в простых геометрических свойствах того чередования точек, которое обусловливается данной их нумерацией.

В случае отрезка $(1, 2)$ это свойство почти очевидно: выражение длины отрезка $x_1 - x_2$ получает положительное или отрицательное числовое значение в зависимости от того, лежит ли точка *1* справа или слева от точки *2*.

В случае треугольника находим, что формула дает для площади положительное или отрицательное значение в зависимости от того, осуществляется ли против или по часовой стрелке[4]) обход контура треугольника, ведущий от вершины *1* через вершину *2* к вершине *3*. Для доказательства мы вычислим сперва определитель, дающий площадь, в случае одного специального, как можно удобнее расположенного треугольника, а затем разберем и общий случай, пользуясь идеей непрерывности. А именно: рассматриваем треугольник с вершиною *1* в «единичной» точке оси x ($x_1 = 1$, $y_1 = 0$), с вершиною *2* в единичной точке оси y ($x_2 = 0$, $y_2 = 1$) и с вершиною *3* в начале координат ($x_3 = 0$, $y_3 = 0$). Согласно нашему условию относительно выбора системы координат обход этого треугольника ($1 \to 2 \to 3$) осуществляется *против* часовой стрелки (рис. 3), а наша формула дает для его площади положительное значение:

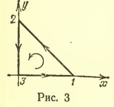


Рис. 3

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\frac{1}{2}.$$

Непрерывно деформируя этот треугольник, можно его вершины перевести в вершины любого другого треугольника с тем же направлением обхода, не давая им при этом ни разу оказаться всем трем на од-

*) Эти две системы различают как «правую» и «левую», так как они соответствуют взаимному расположению трех растопыренных пальцев правой и левой рук (ср. т. 1, с. 97).

ной прямой. При этом наш определитель будет изменяться тоже непрерывно, а так как он обращается в нуль, как известно, только в том случае, когда точки *1*, *2*, *3* лежат на одной прямой, то он будет во время этого процесса деформации сохранять положительное значение. Этим доказано, что площадь всякого треугольника с направлением обхода против часовой стрелки положительна. А поменяв местами две вершины исходного треугольника, увидим тотчас же, что для всякого треугольника, имеющего обход по часовой стрелке, наша формула дает отрицательную площадь.

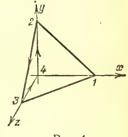


Рис. 4

Совершенно аналогично можем поступить и в случае тетраэдра. Снова исходим из возможно более удобно расположенного тетраэдра: пусть первой, второй и третьей вершинами служат единичные точки осей x, y, z, а четвертой — начало координат (рис. 4). Его объем равен

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\frac{1}{6}.$$

Отсюда, как и раньше, следует, что всякий тетраэдр, который можно получить из этого исходного тетраэдра, непрерывно его дефрмируя, но не давая при этом ни разу всем четырем вершинам оказаться в одной плоскости (т. е. не давая определителю обратиться в нуль), имеет положительный объем.

Все такие тетраэдры можно охарактеризовать тем направлением обхода, который имеет треугольная грань (*2*, *3*, *4*), если ее рассматривать со стороны вершины *1*. Это приводит к такому результату: объем тетраэдра (*1*, *2*, *3*, *4*), определяемый по нашей формуле, получается положительным, если вершины *2*, *3*, *4*, рассматриваемые из вершины *1*, следуют одна за другой против часовой стрелки[5]); в противном случае получаем отрицательный объем.

Таким образом, мы, действительно, из аналитических формул вывели геометрические правила,

позволяющие каждому отрезку, каждому треугольннку, каждому тетраэдру прнписывать определенный знак, еслн только их вершнны заданы в определенной последовательностн.

Этим достнгаются большне пренмущества по сравненню с обычной элементарной геометрней, рассматрнвающей длнну, площадь и объем как абсолютные велнчины, а нменно, мы будем в состоянни устанавлнвать простые теоремы общего характера, тогда как элементарная геометрня должна разлнчать многочисленные случан в зависнмости от того или другого расположення фигур.

Простейшие применения, в частности, двойное отношение. Разрешите мне начать с одного очень прнмнтнвного прнмера, а нменно с «простого отношення» трех точек на одной прямой, напрнмер на осн x.

$S>0$ 1   2   4

$S<0$ 2   1   4

Рис. 5

Если обозначнть этн трн точки через *1*, *2* н *4* (рис. 5), что является для последующего наиболее удобным, то их «простое отношенне» дается формулой

$$S = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4}.$$

Это отношение оказывается, очевндно, положительным илн отрнцательным в завнснмости от того, лежит ли точка *1* вне нлн внутрн отрезка $(2, 4)$.

Еслн же нзвестно, как это обыкновенно бывает прн элементарном изложеннн, лншь абсолютное значенне

$$|S| = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_4|},$$

то нужно дополннтельно лнбо дать еще чертеж, лнбо пояснить словами, нмеют лн в внду внутреннюю нли внешнюю точку, а это, конечно, вноснт значнтельное усложнение. Таким образом, *введение знака длины отрезка учитывает различные возможные случаи расположения точек на прямой* — обстоятельство, которое нам прндется еще часто отмечать в нашних лекцнях[6].

Присоединяя четвертую точку *3*, мы можем составить так называемое *двойное* (или *ангармоническое*) *отношение* четырех точек[7])

$$D = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} : \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4} = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_3 - x_2)}.$$

Это выражение также имеет определенный знак, а именно, как непосредственно видно, $D < 0$, *если* пары точек *1*, *3* и *2*, *4* разделяют одна другую, и $D > 0$ в противоположном случае, т. е. когда обе точки *1* и *3* одновременно лежат вне или внутри отрезка *2*, *4* (рис. 6, 7). Таким образом, снова получаем каждый раз два существенно различных расположения, дающих для D одно и то же абсолютное

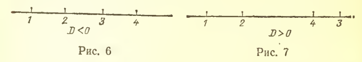


Рис. 6 Рис. 7

значение. Задавая лишь последнее, мы должны еще каждый раз отчетливо указать, как именно расположены четыре точки; если, например, определяют «гармонические точки» равенством $|D| = 1$, как все еще, к сожалению, чаще всего поступают в школе, то к этому определению неизбежно приходится прибавлять требование о раздельном положении обеих пар точек, тогда как нам достаточно одного лишь требования $D = -1$.

Особенно полезным оказывается считаться со знаком в *проективной геометрии*, где, как известно, двойное отношение играет основную роль.

Известное предложение проективной геометрии гласит: четыре точки одной прямой имеют такое же двойное отношение, как и четыре точки любой другой прямой, получаемые из первых проектированием их из произвольного центра (перспектива) (рис. 8).

Если рассматривать двойное отношение как относительную величину, имеющую определенный знак, то имеет место также следующая обратная теорема, не допускающая исключений:

Две четверки точек на двух прямых, имеющие равные двойные отношения D, всегда могут быть

получены одна из другой путем однократного или повторного перспективного преобразования.

Так, например, на рис. 8 четверки *1, 2, 3, 4* и *1″, 2″, 3″, 4″* получаются одна из другой последовательным проектированием из центров P и P'. Если же известно только абсолютное значение двойного отноше-

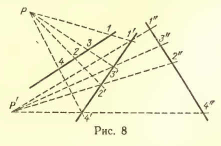


Рис. 8

ния D, то соответствующая теорема перестает быть справедливой в столь простой форме; в этом случае нужно еще прибавить дополнительное предположение, касающееся взаимного расположения точек.

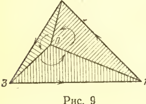


Рис. 9

Еще более плодотворным оказываются *применения нашей формулы, дающей площадь треугольника.* Возьмем прежде всего где-либо внутри треугольника (*1, 2, 3*) точку O и соединим ее с вершинами (рис. 9). Рассматривая площади полученных треугольников как абсолютные величины, находим, что их сумма равна площади исходного треугольника:

$$|(1,\ 2,\ 3)| = |(O,\ 2,\ 3)| + |(O,\ 3,\ 1)| + |(O,\ 1,\ 2)|.$$

На нашем рисунке вершины, взятые в указанном здесь порядке, в каждом треугольнике следуют одна за другой против часовой стрелки, так что площади треугольников (*1, 2, 3*), (*O, 2, 3*), (*O, 3, 1*), (*O, 1, 2*) получают, согласно нашему общему определению, знак плюс.

Поэтому мы можем нашу формулу написать еще и таким образом:

$$(1,\ 2,\ 3) = (O,\ 2,\ 3) + (O,\ 3,\ 1) + (O,\ 1,\ 2).$$

Теперь я утверждаю, что *эта формула имеет место и в том случае, когда точка O лежит вне треугольника, и вообще, когда O, 1, 2, 3 — четыре произвольные точки на плоскости.* Например, при расположении точек, указанном на рис. 10, обход треугольников $(O, 2, 3)$ и $(O, 3, 1)$ происходит против часовой стрелки, а треугольника $(O, 1, 2)$ — по часовой стрелке, так что наша формула дает для абсолютных величин площадей равенство

$$|(1, 2, 3)| = |(O, 2, 3)| + |(O, 3, 1)| - |(O, 1, 2)|,$$

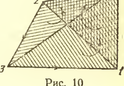


Рис. 10

в справедливости которого легко убедиться из рисунка.

Мы докажем наше утверждение в общем виде, исходя из аналитического определения, причем в нашей формуле мы узнаем некоторое предложение, известное из алгебры, а именно, из теории определителей. Ради большего удобства примем за точку O начало координат $(x = 0,\ y = 0)$ — что, очевидно, не вносит существенного нарушения общности[8]) — и заменим площади четырех треугольников соответствующими детерминантами; тогда, опуская всюду множитель $\frac{1}{2}$, мы должны будем доказать, что для произвольных значений $x_1, \ldots, y_3$ имеет место соотношение

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Величина каждого из определителей справа не изменится, если второй и третий элементы последнего столбца (т. е. единицы) заменить нулями, ибо эти элементы при разложении по элементам первой строки входят лишь в те два минора, которые умножаются на нуль; если, кроме того, в двух последних определителях мы произведем циклическую перестановку строк (что допустимо в определителях третьего и вообще нечетного порядка), то можем наше равенство

записать таким образом:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Но это тождество: справа имеем попросту алгебраические дополнения последнего столбца левого определителя, так что перед нами известное разложение этого определителя по элементам одного из его столбцов. Этим наше предложение сразу доказано для всех возможных случаев расположения четырех точек [9]).

Площадь прямолинейных многоугольников. Доказанную формулу мы можем сейчас же обобщить так, чтобы она давала *площадь произвольных многоугольников*. Для наглядности рассмотрим такую геодезическую задачу: требуется определить площадь участка земли с прямолинейными сторонами, зная на основании измерений координаты его последовательных вершин *1*, *2*, ..., $n-1$, n (рис. 11).

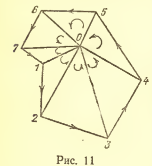


Рис. 11

Кто не привык оперировать со знаками при площадях, тот должен сделать набросок многоугольника по этим данным, разложить его, например, диагоналями на треугольники, а затем в зависимости от его особого вида — в особенности от того, какие именно внутренние углы являются невыпуклыми (т. е. содержащими более 180°), — определить искомую площадь как сумму или разность площадей отдельных треугольников. Мы же можем сразу написать общую формулу, которая совершенно автоматически даст правильный результат, не требуя никакого чертежа. Если O — какая-либо точка плоскости, например начало координат, то площадь нашего многоугольника при обходе его вершин в последовательности *1*, *2*, ..., n равна

$$(1, 2, 3, \ldots, n) =$$
$$= (O, 1, 2) + (O, 2, 3) + \ldots + (O, n-1, n) + (O, n, 1),$$

где треугольники следует брать со знаками, определяемыми указанным направлением обхода. Эта формула дает *положительную* или *отрицательную площадь* в зависимости от того, движемся ли мы, обходя многоугольник в порядке $1, 2, \ldots, n$, *против часовой стрелки* или *по часовой стрелке*. Мы ограничимся указанием на эту формулу, а доказательство вы можете провести сами.

Я охотнее остановлюсь еще на нескольких особенно интересных случаях, которые, конечно, не могут иметь места при измерениях на местности, а именно, *на самопересекающихся многоугольниках*, как, например, четырехугольник на рис. 12. Если вообще мы хотим говорить здесь об определенной площади, то это может быть только то ее значение, которое дает наша формула; мы должны лишь уяснить себе геометрический смысл этого значения. Прежде всего, легко убедиться в том, что это значение не зависит от положения точки O *).

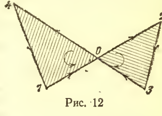


Рис. 12

*) Пусть точка O имеет координаты x, y. Площадь многоугольника $(1, 2, 3, \ldots, n)$, определяемая формулой

$$(1, 2, 3, \ldots, n) = (O, 1, 2) + (O, 2, 3) + \ldots + (O, n, 1),$$

является некоторой функцией $f(x, y)$ этих координат x, y. Чтобы доказать независимость величины этой площади от выбора точки O, достаточно показать, что

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

(тождественно). Но мы имеем

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{n} (O, k, k+1) = \sum \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_{k+1} & y_{k+1} & 1 \end{vmatrix},$$

где $n+1$ надо заменить на единицу. Поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_{k+1} & y_{k+1} & 1 \end{vmatrix} = \sum (y_k - y_{k+1}) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_{k+1} & y_{k+1} & 1 \end{vmatrix} = -\sum (x_k - x_{k+1}) = 0.$$

Поэтому, если поместить точку O по возможности удобнее, а именно в ту точку, где стороны четырехугольника пересекают одна другую, то площади треугольников $(O, 1, 2)$ и $(O, 3, 4)$ станут нулями, и останется

$$(1, 2, 3, 4) = (O, 2, 3) + (O, 4, 1);$$

здесь первый треугольник имеет отрицательную, второй — положительную площадь. Следовательно, площадь нашего четырехугольника при направлении обхода $(1, 2, 3, 4)$ равна абсолютной величине площади его части $(O, 4, 1)$, обходимой *против* часовой стрелки, *без абсолютной* величины части $(O, 2, 3)$, обходимой по часовой стрелке.

В качестве второго примера рассмотрим изображенный здесь *звездчатый пятиугольник* (рис. 13). Если поместить точку O в средней части, то в сумме

$$(O, 1, 2) + (O, 2, 3) + \ldots + (O, 5, 1)$$

Рис. 13

все отдельные треугольники получают положительный обход; их сумма дважды покрывает площадь внутреннего пятиугольного ядра, а каждый из пяти уголков (хвостов) по одному разу. Если снова обратимся к однократному обходу многоугольника $(1, 2, 3, 4, 5, 1)$, то увидим, что каждую часть приходится обходить против часовой стрелки, а именно, те части, которые при определении площади считаются дважды, обходим дважды, а те, которые считаются по одному разу, обходим также один раз.

Изучение этих двух примеров приводит нас к следующему общему правилу: *для каждого прямолинейного самопересекающегося многоугольника* наша формула дает в качестве площади *алгебраическую сумму площадей отдельных частей*, ограничиваемых контуром многоугольника, причем каждую часть следует считать *столько раз, сколько раз мы описываем ее при однократном обходе периметра многоугольника* $(1, 2, 3, \ldots, n, 1)$, а именно, каждый раз со зна-

ком плюс или минус в зависимости от того, происходит ли обход ее против часовой стрелки или по часовой стрелке. Желательно, чтобы вы сами дали общее доказательство справедливости этого правила; при этом вы не встретите никаких затруднений. Тем более рекомендую я вам вполне усвоить на отдельных примерах эти интересные формулы для площадей.

Площади фигур, ограниченных кривыми линиями. Перейдем теперь от многоугольников к фигурам, ограниченным кривыми линиями. Итак, мы рассматриваем какую-либо замкнутую кривую, которая сколь угодно часто может пересекать себя; мы приписываем ей определенное направление обхода и спрашиваем, какую площадь она ограничивает. Конечно, мы найдем эту площадь, аппроксимируя кривую (рис. 14) многоугольниками с очень большим числом весьма малых сторон и отыскивая предел суммы площадей этих многоугольников, определяемых только что указанным образом [10]). Если $P(x, y)$ и $P_1(x+dx,\ y+dy)$ — две соседние вершины такого аппроксимирующего нашу кривую многоугольника, то его площадь составится из суммы элементарных треугольников (O, P, P_1), т. е. исключительно из слагаемых вида

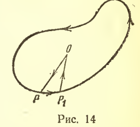


Рис. 14

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x+dx & y+dy & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

В пределе эта сумма переходит в криволинейный интеграл

$$\frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx),$$

взятый вдоль нашей кривой в указанном направлении; это дает нам определение площади, ограничиваемой нашей кривой. Чтобы дать геометрическое толкование этого определения, можно перенести на этот новый случай результат, высказанный нами для многоугольников: каждая заключенная внутри кривой

часть площади входит в интеграл столько раз со знаком плюс и столько раз со знаком минус, сколько раз она описывается соответственно против часовой стрелки или по часовой стрелке при однократном обходе всей кривой в заданном направлении.

В случае простой кривой, подобной изображенной на рис. 14, этот интеграл дает поэтому в точности ограничиваемую этой кривой площадь со знаком плюс [11]).

На рис. 15 внешняя часть считается один раз, а внутренняя — два раза со знаком плюс; на рис. 16 левая часть получает знак минус, а правая — знак плюс, так что в общем получается отрицательная площадь; на рис. 17 одну часть совсем не приходится

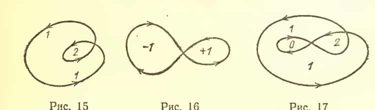


Рис. 15 Рис. 16 Рис. 17

брать в расчет, так как для нее получается один раз положительный, а другой раз отрицательный обход [12]). Конечно, таким образом могут возникнуть и кривые с площадью, равной нулю, если бы, например, кривая на рис. 16 была симметрична относительно точки пересечения; этот случай не представляет сам по себе ничего нелепого, если принять во внимание, что все определение площади основывается исключительно на целесообразных соглашениях.

Теория полярного планиметра Амслера. Чтобы показать вам, насколько целесообразным является введение этих понятий, я опишу теперь *полярный планиметр Амслера.*

Этот чрезвычайно остроумный очень часто применяемый на практике аппарат, сконструированный в 1854 г. механиком Якобом Амслером в Шаффхаузене (Швейцария), выполняет определение площадей как раз в духе изложенных выше идей.

Начну с изложения теоретического принципа конструкции.

Сообщим штанге A_1A_2 (рис. 18) длиною l такое перемещение по плоскости, чтобы каждый из ее концов A_1 и A_2 описал замкнутую кривую, а сама штанга возвратилась в свое исходное положение.

Наша цель — определить площадь той части плоскости, по которой проходит (которую «заметает») при своем движении наша штанга. При этом будет вполне естественным считать отдельные части этой

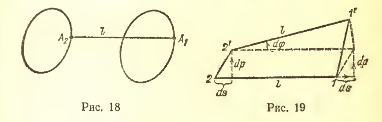


Рис. 18 Рис. 19

площади положительными или отрицательными в зависимости от того, описываются ли они штангой в одном или в другом направлении, руководствуясь при этом нижеизложенным правилом. А именно, непрерывное движение штанги заменяем последовательностью произвольно малых скачкообразных «элементарных движений» (из положения *1 2* в соседнее положение *1′ 2′*) аналогично тому предельному переходу, который выполняют при каждом интегрировании.

Тогда искомая площадь окажется равною пределу суммы площадей всех «элементарных четырехугольников» (*1*, *1′*, *2′*, *2*), описываемых при этих элементарных движениях. При этом, как легко видеть, для правильного учета направления движения штанги следует каждый элементарный четырехугольник брать со знаком, соответствующим направлению обхода *1*, *1′*, *2′*, *2*.

Каждое «элементарное движение» штанги A_1A_2 можно разложить на такие три составляющих движения (рис. 19):

1. Параллельный перенос вдоль самой штанги на отрезок ds.

2. Параллельный перенос по перпендикуляру к штанге на отрезок dp.

3. Поворот вокруг вершины A_2 на угол $d\varphi$,

При этом будут описаны соответственно площади $0 \cdot ds$, $l\,dp$, $\frac{l^2}{2}\,d\varphi$; площадь «элементарного четырехугольника» (*1*, *1'*, *2'*, *2*) можно будет просто заменить суммой этих площадей, ибо совершаемая при этом ошибка имеет высший порядок малости и исчезает при предельном переходе (который ведь является простым процессом интегрирования).

Существенным является то, что эта сумма

$$l\,dp + \frac{l^2}{2}\,d\varphi$$

совпадает также и по знаку с площадью четырехугольника (*1*, *1'*, *2'*, *2*), если только считать $d\varphi$ положительным при вращении против часовой стрелки, а dp — положительным при параллельном переносе в сторону возрастания φ [13]).

Отсюда интегрирование по всему пути движения дает для площади, описанной штангой A_1A_2, такое выражение:

$$J = l \int dp + \frac{l^2}{2} \int d\varphi.$$

Здесь $\int d\varphi$ представляет собой весь угол, на который повернулась штанга относительно своего исходного положения. А так как мы ее возвращаем в конце концов в ее исходное положение, то $\int d\varphi = 0$, если только в процессе движения она не делает ни одного полного оборота. Поэтому вся площадь сводится к

$$J = l \int dp. \qquad (1)$$

Если же штанга, прежде чем вернуться в исходное положение, делает один или несколько полных оборотов, что вполне возможно при определенном виде кривых, описываемых точками A_1 и A_2, то $\int d\varphi$ равен некоторому кратному 2π. Поэтому при каждом полном обороте в положительном направлении следует прибавить к правой части равенства $+l^2\pi$, а при каждом полном обороте в отрицательном направлении прибавить $-l^2\pi$. Однако мы для простоты оставим в стороне это маленькое усложнение.

Но эту же площадь J можно определить еще и несколько иным способом (рис. 20). Пусть штанга при последовательных элементарных движениях принимает поочередно положения $1\ 2,\ 1'\ 2',\ 1''\ 2'', \ldots$; тогда J окажется равным сумме площадей элементарных четырехугольников:

$$J = (1, 1', 2', 2) + \\ + (1', 1'', 2'', 2') + \\ + (1'', 1''', 2''', 2'') + \ldots$$

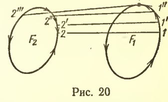


Рис. 20

или, выражаясь точнее, равным интегралу, представляющему собой предел этой суммы. При этом каждый элементарный четырехугольник следует брать, как и раньше, с определенным указанным здесь направлением обхода. Выбирая теперь как-нибудь начало координат O и применяя установленную нами выше формулу для многоугольника, можем написать

$$J = (O, 1, 1') + (O, 1', 2') + (O, 2', 2) + (O, 2, 1) + \\ + (O, 1', 1'') + (O, 1'', 2'') + (O, 2'', 2') + (O, 2', 1') + \\ + (O, 1'', 1''') + (O, 1''', 2''') + (O, 2''', 2'') + \\ + (O, 2'', 1'') + \ldots$$

Здесь второе слагаемое каждой строки взаимно уничтожается с четвертым слагаемым следующей строки, так как эти слагаемые выражают площади равных, но обходимых в противоположном направлении треугольников. Например, $(O, 1', 2') = -(O, 2', 1')$, $(O, 1'', 2'') = -(O, 2'', 1'')$, ... Кроме того, так как ряд элементарных четырехугольников конечен, то второе слагаемое последней строки $(O, 1, 2)$ взаимно уничтожается с последним слагаемым $(O, 2, 1)$ первой строки. Таким образом, в каждой строке остаются только первые и третьи слагаемые, но все первые слагаемые дают в сумме, согласно той же формуле, площадь многоугольника $(1, 1', 1'', 1''', \ldots)$, т. е. в пределе площадь F_1, которая ограничена кривой, описываемой концом A_1 штанги. Точно так же, меняя знак каждого третьего слагаемого, получим в сумме площадь многоугольника $(2, 2', 2'', 2''', \ldots)$, т. е. в

пределе площадь F_2, которая ограничена кривой, описываемой концом A_2. Итак, окончательно получаем

$$J = F_1 - F_2, \tag{2}$$

причем каждая кривая может, очевидно, как угодно пересекать себя; нужно только при определении площадей F_1 и F_2 точно придерживаться нашего правила знаков.

В формулах (1) и (2) заключается геометрическая теория планиметра. А именно, если вести «подвижной штифт» A_1 по кривой, заключающей искомую площадь F_1, позволяя в то же время точке A_2 двигаться только по замкнутой кривой с известной нам площадью F_2[14]), то мы определим площадь F_1 по формуле

$$F_1 = F_2 + l \int dp, \tag{2'}$$

вытекающей из (2), если только будем иметь приспособление, измеряющее $\int dp$.

Механической частью изобретения Амслера и является такого рода приспособление, состоящее в том, что на штангу A_1A_2 как на ось насажен ролик, который при движении штанги катится по бумаге. Пусть λ — его расстояние от A_2, а ρ — его радиус (рис. 21). Полный угол ψ, на который ролик повернется во время движения штанги, составится, как из слагаемых, из поворотов $d\psi$, соответствующих элементарным движениям, а каждый такой поворот $d\psi$ можно в свою очередь рассматривать как сумму трех поворотов $d\psi_1$, $d\psi_2$, $d\psi_3$, соответствующих тем трем простым движениям, из которых мы выше составляли каждое элементарное движение штанги (с. 23).

Рис. 21

При продольном параллельном переносе «1» ролик не будет вращаться: $d\psi_1 = 0$; при поперечном параллельном переносе «2» штанги A_1A_2 нормально к ней на dp ролик прокатится на отрезок $dp = \rho\, d\psi_2$, так что $d\psi_2 = \frac{1}{\rho}\, dp$; наконец, при повороте «3» вокруг A_2 на угол $d\varphi$ ролик прокатится на длину

$\lambda\, d\varphi = \rho\, d\psi_3$, так что $d\psi_3 = \frac{\lambda}{\rho}\, d\varphi$. Итак, окончательно получаем

$$d\psi = \frac{1}{\rho}\, dp + \frac{\lambda}{\rho}\, d\varphi.$$

Если штанга A_1A_2 возвращается в исходное положение, не делая ни одного полного оборота, так что при интегрировании по всему пути $\int d\varphi = 0$, то полный угол поворота амслерова ролика окажется равным

$$\psi = \frac{1}{\rho} \int dp. \tag{3}$$

Если бы штанга совершила один или несколько полных оборотов, то в правую часть этой формулы вошло бы еще соответствующее кратное числа $2\pi \frac{\lambda}{\rho}$, но мы, как и выше, оставляем этот случай в стороне.

На основании формул (2′) и (3) мы окончательно получаем

$$F_1 - F_2 = l\rho\psi,$$

т. е. *разность между площадями кривых, описываемых концами штанги, измеряется углом* ψ *поворота ролика.*

При изготовлении этого инструмента оказывается целесообразным сделать площадь F_2 равной нулю. Амслер достигает этого превосходным в конструктивном отношении способом, поместив A_2 на конце шатуна, который может вращаться вокруг неподвижной точки M (рис. 22).

A_2 A_1 M

Рис. 22

Благодаря этому A_2 может только передвигаться вперед и назад по окружности и потому не описывает никакой площади, если не считаться с тем возможным усложнением, когда точка A_2 обходит один или даже несколько раз окружность в том или другом направлении. Этому «полюсу» M *полярный планиметр* и обязан своим названием.

Применение аппарата сводится к тому, что «подвижным штифтом», помещенным в точке A_1,

обводят измеряемую площадь, отсчитывают на ролике угол ψ и вычисляют описанную площадь по формуле

$$F_1 = l\rho\psi.$$

Константу аппарата $l\rho$ определяют измерением известной уже площади, например площади квадрата со стороной единица.

Вы видите здесь изображение полярного планиметра (рис. 23). Конечно, для того чтобы как следует

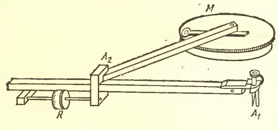


Рис. 23

разобраться в этом аппарате, вы должны видеть его и попробовать работать им. Чтобы аппарат функционировал надежным образом, он должен, конечно, иметь несколько более сложное устройство, чем этого требует одна лишь теория прибора. Ограничусь в этом отношении немногими указаниями: точка M прикреплена к тяжелому предмету и соединена штангой с точкой A_2. Теоретически важной штангой A_1A_2, о которой мы все время говорили, является не тот второй металлический стержень, который вы видите в аппарате, но параллельное этому стержню воображаемое продолжение оси укрепленного рядом с ним ролика, проходящее через подвижной штифт A_1. Последний сопровождается еще параллельным ему тупым штифтом, который служит для того, чтобы не давать острию A_1 вонзаться в бумагу. Ролик снабжен нониусом для более точного отсчета углов, а также маховичком для определения числа полных оборотов.

Я не стану больше останавливаться на подробностях; вместо этого я хотел бы высказать следующее предостережение общего характера.

Изучая теорию подобных аппаратов, не пренебрегайте вопросами действительного *практического* их *осуществления.* К такому пренебрежению, к сожалению, часто бывает слишком склонен чистый математик, а такую односторонность так же трудно оправдать, как и противоположную крайность того механика, который, не интересуясь теорией, тонет в конструктивных деталях. Тут именно *прикладная математика* и должна явиться связующим звеном. В частности, она должна учесть то, что в действительности никакой аппарат никогда точно не соответствует теоретической формулировке принципа. Ибо, например, шарниры всегда немного люфтуют, ролик не только катится, но и скользит по бумаге; наконец, сама чертежная бумага не представляет собою идеальной плоскости, и, кроме того, никогда нельзя вполне точно вести штифт вдоль данной кривой. Конечно, для практики чрезвычайно важно то, в какой именно мере оказывают влияние подобные обстоятельства и до какого знака может быть точен результат, который отсчитывается на ролике, а это и должно составить предмет исследования прикладной математики.

Объемы многогранников, закон ребер Мёбиуса. Возвращаясь снова к нашим общим исследованиям о площадях и объемах, я начну со следующей исторической справки. Я назову вам человека, впервые последовательно применившего принцип знаков в геометрии — великого геометра Мёбиуса из Лейпцига. Этот решительный успех осуществлен в его юношеском произведении «Барицентрическое исчисление» *). Это одно из тех сочинений, которые вообще легли в основу новой геометрии. Чтение его уже благодаря одному только прекрасному изложению доставляет особенное удовольствие. Название связано с тем, что Мёбиус с самого начала оперирует с центрами тяжести [15]). А именно: пусть в каких-нибудь трех неподвижных точках O_1, O_2, O_3 на плоскости помещаются три массы m_1, m_2, m_3 (рис. 24), которые, как, например, в случае электрических зарядов, могут быть и положительными, и отрицательными. Тогда их центр тяжести P оказывается однозначно определенным и

*) Möbius A. F. Der baryzentrischer Calkul. — Leipzig, 1827.

при варьировании масс m_1, m_2, m_3 может «описать» всю плоскость (т. е. занять любое положение на ней). Поэтому эти три массы m_1, m_2, m_3 можно рассматривать как координаты точки P, причем ясно, что положение точки P зависит только от отношений этих трех величин. Этим впервые было введено в геометрию то, что мы теперь называем *треугольными координатами*[16]). Сказанного достаточно для объяснения названия книги Мёбиуса; из ее прочего очень интересного содержания наибольшую связь с нашими исследованиями имеют § 17—20. В них Мёбиус применяет принцип знаков при нахождении площадей треугольников и объемов тетраэдров, причем его определения в точности совпадают с теми, которые я вам изложил.

$O_3(m_3)$ P $O_1(m_1)$ $O_2(m_2)$

Рис. 24

Следует еще упомянуть, что Мёбиус, будучи уже в почтенном возрасте (в 1858 г.), дополнил эти результаты одним плодотворным открытием, которое было впервые опубликовано лишь в 1865 г. в его работе «Об определении объема многогранника»*).

А именно, в этой работе он показал, что существуют такие многогранники, которым никак не удается приписать определенный объем. Между тем, как мы уже видели, всякому, как угодно сложно переплетающемуся многоугольнику на плоскости можно приписать вполне определенную площадь. На этом удивительном явлении нам следует остановиться подробнее.

Будем исходить из установленной выше формулы для объема тетраэдра

$$(1, 2, 3, 4)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложение этого определителя по элементам последнего столбца сводится, совершенно аналогично случаю треугольника (с. 16), к тому, что мы разлагаем

*) Möbius A. F. Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders//Ber. Verhandl. Königl. Sächs. Ges. Wiss. — 1865. — Bd. 17. — S. 31.

наш тетраэдр на четыре других тетраэдра, основаниями которых служат его четыре грани, а общею вершиною — начало координат O. В результате, обращая внимание на циклическую последовательность *1*, *2*, *3*, *4* и применяя правило знаков теории определителей, получаем такую формулу [17]):

$$(1, 2, 3, 4)=(O, 2, 3, 4)-(O, 3, 4, 1)+(O, 4, 1, 2)-(O, 1, 2, 3).$$

В эту формулу, в отличие от соответствующей формулы для треугольника, в которую входили только знаки плюс, входят также и знаки минус, что объясняется тем, что при циклической перестановке строк определители четного порядка меняют знак, а определители нечетного порядка знака не меняют. Конечно, переставляя подходящим образом строки, можно избавиться от знаков минус, но при этом приходится отказаться от циклического порядка.

Например, можно написать:

$$(1, 2, 3, 4)=(O, 2, 3, 4)+(O, 4, 3, 1)+(O, 4, 1, 2)+(O, 2, 1, 3).$$

Чтобы вскрыть содержащуюся здесь закономерность, представим себе, что поверхность тетраэдра вырезана, скажем, из бумаги и развернута на плоскость грани *2*, *3*, *4* так, что вершина *1* принимает три различных положения (рис. 25). Тогда вершины каждого бокового треугольника в порядке их записи в последней формуле следуют одна за другой на рис. 25 против часовой стрелки, т. е. в одинаковом направлении обхода для всех треугольников.

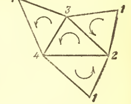


Рис. 25

Конечно, эту закономерность можно высказать, и не разворачивая пространственной фигуры на плоскость. А именно, каждое из шести ребер принадлежит двум граням, и мы замечаем, что при обходе всех треугольников в установленном выше направлении *каждое ребро* приходится проходить *один раз* в одном, *другой раз* в противоположном направлении.

Этим правилом, которое Мёбиус назвал *законом ребер*, очевидно, определяется направление обхода для всех граней, если таковое произвольно задано для какой-нибудь одной грани[18]). Тогда наша формула гласит: тетраэдр (*1*, *2*, *3*, *4*) *можно рассматривать как сумму*[19]) *четырех тетраэдров-частей* — с одною и тою же первою вершиною *O* и с тремя другими вершинами в каждом, расположенными вслед за *O* в том порядке, который получается по *закону ребер Мёбиуса* как продолжение направления обхода (*2*, *3*, *4*).

Выше (с. 18), обобщая формулу разложения треугольника, мы пришли к определению площади любых многоугольников. Совершенно так же попробуем теперь, исходя из последнего результата, дать *определение объема любых многогранников*. При этом нам придется допустить возможность пересечения, во-первых, сторон отдельного многоугольника, служащего гранью многогранника, а во-вторых, плоскостей этих граней. Затем нам нужно будет фиксировать какую-нибудь вспомогательную точку *O* и определить прежде всего *объем пирамиды* с вершиной *O*, «основанием» которой является некоторая грань многогранника.

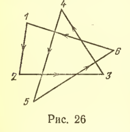


Рис. 26

Для этого мы должны сперва фиксировать на основании этой пирамиды (пусть это, например, будет грань (*1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*) многогранника на рис. 26) определенное направление обхода. Тогда этот многоугольник получает определенную площадь согласно упомянутой выше формуле[20]). Как и в элементарной геометрии, положим объем пирамиды (*O*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*) равным одной трети произведения площади основания на высоту, но только присоединим к нему знак[21]) плюс или минус в зависимости от того, представится ли обход (*1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*), рассматриваемый из *O*, идущим против или по часовой стрелке. Непосредственно видно, что это определение содержит в себе предыдущее определение, относящееся к тетраэдру, как частный случай; впрочем, это определение (относящееся к пирамиде) естественным образом можно получить из предыдущего, заменяя многоугольник, как

это делается при определении его площади, суммой треугольников с надлежащим направлением обхода и определяя пирамиду как сумму тетраэдров, проектирующих эти треугольники.

Односторонние многогранные поверхности. Желая теперь и в общем случае представить многогранник в виде суммы таких составляющих его пирамид, мы должны для *каждой* грани установить определенное направление обхода. Согласно предыдущему при этом мы можем руководствоваться только правилом ребер, а именно: *для какого-нибудь одного многоугольника фиксируем направление обхода произвольным образом, а остальные многоугольники будем обходить так, чтобы пройти по каждому ребру, общему двум соседним граням, в двух противоположных направлениях.*

Если удается применить это правило ко всем граням поверхности, не наталкиваясь на противоречия, то получаем объем многогранника в виде суммы объемов отдельных пирамид, имеющих общей вершиной O, а основаниями грани многоугольника, с установленным таким образом направлением обхода; нетрудно видеть[22]), что получаемый результат однозначен и не зависит от положения точки O. Однако имеет место тот крайне удивительный факт, что правило ребер не для всякой замкнутой многогранной поверхности удается провести без противоречий[23]).

Другими словами, существуют многогранники, к которым оказывается неприложимым никакое определенное правило знаков и которым поэтому никоим образом нельзя приписать определенного объема. В этом и состоит великое открытие, опубликованное Мёбиусом в 1865 г.

A_1 B_2 B_1 A_2

Рис. 27

В упомянутой работе Мёбиус рассматривает поверхность, названную позже *листом Мёбиуса*[24]), получаемую следующим образом.

Вырезанный из бумаги длинный узкий прямоугольник $A_1B_1A_2B_2$ (рис. 27) перекручивают один раз и скрепляют (склеивают) узкие его стороны A_1B_1, A_2B_2 так, чтобы точка A_1 совпала с A_2, а B_1 с B_2 (а не наоборот); при этом передняя (обращенная

к нам) сторона листа переходит, очевидно, в заднюю (изнаночную), так что получается *поверхность с одной только стороной.* Отсюда вытекает такой немного вульгарный вывод: маляр, покрывая весь этот лист краской, должен был бы затратить этой краски вдвое больше, чем он мог бы предположить, исходя из длины первоначального листа: выкрасив лист один раз по всей его длине, маляр подойдет к первоначальному месту, но с противоположной стороны и должен будет еще раз пройти кистью по всему листу прежде, чем вернется к действительному исходному пункту[25]).

Вместо этого изогнутого листа можно также получить многогранную (незамкнутую) поверхность с исключительно плоскими частями, имеющую такое же свойство; для этого нужно разбить прямоугольник, например, на треугольники и перегнуть его по линиям деления. Чтобы получить такой пояс из треугольников, нужно иметь по меньшей мере пять треугольников, которые следует расположить так, как

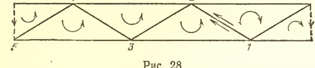


Рис. 28

указано на рис. 28. При этом крайние полутреугольники при свертывании поверхности дают один треугольник (*4*, *5*, *1*). *Для полученного пояса из треугольников уже нельзя будет воспользоваться правилом ребер.* В самом деле, исходя из положительного направления обхода (*1*, *2*, *3*) и продолжая его влево по правилу ребер, получим последовательно обходы (*3*, *2*, *4*), (*3*, *4*, *5*), (*5*, *4*, *1*), (*5*, *1*, *2*). В последнем из них ребро *1*, *2* проходится в том же направлении, что и в исходном треугольнике (*1*, *2*, *3*), а это противоречит правилу ребер.

Будучи перегнут вдоль ребер и сложен, лист, рассматриваемый сверху, имеет вид пятиугольной фигуры, диагоналями которой служат пять отрезков *1 3*, *3 5*, *5 2*, *2 4*, *4 1*, составляющие край листа Мёбиуса, как показано на эскизе (рис. 29). Соединяя свободные ребра этого пояса, т. е. упомянутые пять диагоналей, треугольниками с какой-либо точкой про-

странства O (лучше всего расположенной над центром пятиугольника), Мёбиус получает *замкнутый многогранник*, а именно, перекрученную пятигранную пирамиду. Конечно, к этому замкнутому многограннику, образованному 10 треугольниками, правило ребер тоже неприменимо, а потому не приходится говорить о его объеме [26]).

Еще один замкнутый односторонний многогранник очень простого строения мы можем легко получить

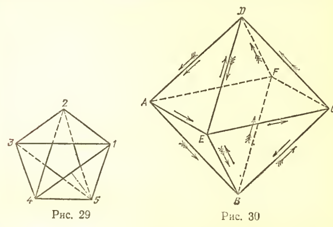


Рис. 29

Рис. 30

из октаэдра (рис. 30) следующим образом. Из граней октаэдра выбирают какие-либо четыре, которые, не будучи соседними, т. е. не имея общих ребер, имеют попарно по общей вершине (например, AED, EBC, CFD, ABF), и присоединяют к ним три квадрата $ABCD$, $EBFD$, $AECF$, лежащих в диагональных плоскостях.

Получаемый таким образом «гептаэдр» (семигранник) имеет те же ребра, что и наш октаэдр, ибо в каждом ребре последнего, как непосредственно видно, встречаются по две соседних грани гептаэдра (а именно, каждый раз боковая грань с диагональным квадратом октаэдра).

Но диагонали октаэдра нельзя рассматривать как ребра гептаэдра, ибо для последнего диагональные квадраты октаэдра не являются соседними гранями; напротив, вдоль диагоналей AC, BD, EF наша многогранная поверхность пересекает себя. Доказательство односторонности этого гептаэдра тоже легко

получается при помощи правила ребер. А именно, если в последовательности граней *AED*, *EDFB*, *ECB*, *ABCD* задать как-либо для первой из них направление обхода и определить направление обхода для следующих граней соответственно правилу ребер, то окажется, что ребро *AD* будет пройдено *дважды в одном и том же направлении.*

На этом я заканчиваю изучение длин, площадей и объемов и перехожу к рассмотрению *дальнейших элементарных геометрических величин.*

Если до сих пор нами руководило имя Мёбиуса, то теперь мы примкнем к идеям великого геометра Германа Грассмана из Штеттина, которые были им впервые изложены в 1844 г. в его книге «Учение о линейном протяжении»[*]). Эта книга, как и книга Мёбиуса, чрезвычайно богата идеями, но в противоположность последней написана так неясно, таким необыкновенно темным языком, что в продолжение десятилетий оставалась без внимания и непонятой; только тогда, когда пришли другим путем к подобным же идеям, обратили внимание на их наличие в книге Грассмана. Чтобы получить представление о его абстрактном языке, достаточно рассмотреть заголовки введения к этой книге. Вот они: «Вывод понятия чистой математики», «Вывод понятия учения о протяжении», «Изложение понятия учения о протяжении», далее следует еще «Обзор общего учения о формах». Лишь после того, как читатель осилил все эти общие «изложения», он подходит ко все еще очень трудно понимаемому, чисто отвлеченному изложению основного содержания книги. Лишь позже, в 1862 г., в новой обработке своего «Учения о протяжении» Грассман пользуется немного более легким для понимания аналитическим изложением с помощью координат.

Самое название «Учение о протяжении» придумано было Грассманом для того, чтобы отметить, что его исследования относятся к любому числу измерений. «Геометрия» же для него является лишь применением этой новой совершенно абстрактной дисциплины к обыкновенному пространству трех измерений. Однако это новое название не привилось — в на-

[1]) Grassman H. Die lineale Ausdehnungslehre. — Leipzig, 1884.

стоящее время говорят просто о *n-мерной геометрии* (или геометрии n измерений).

Мы познакомимся с идеями Грассмана, пользуясь привычной для нас аналитической формой изложения в координатах. Ограничимся на первое время геометрией на плоскости.

II. ГРАССМАНОВ ПРИНЦИП ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ

Линейные элементы (векторы). Будем исходить снова из идей, изложенных нами в начале первой главы; там мы из координат трех точек составили определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

и толковали его как удвоенную площадь треугольника, т. е. как площадь параллелограмма.

Рассмотрим теперь еще таблицы

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad \text{соответственно} \quad \| x_1 \ y_1 \ 1 \|,$$

образованные из координат двух или соответственно одной точки. Эти таблицы будем называть матрицами. На каждую такую матрицу условимся смотреть как на представительницу совокупности всех определителей, которые получаются из нее вычеркиванием одного или соответственно двух столбцов.

Таким образом, из первой матрицы, опуская первый или соответственно второй столбец, получаем определители второго порядка

$$Y = y_1 - y_2, \quad X = x_1 - x_2,$$

а опуская третий, — определитель

$$N = x_1 y_2 - x_2 y_1;$$

принятый здесь выбор обозначений окажется целесообразным для геометрического описания в дальнейшем.

Мы должны исследовать, какой геометрический образ фиксируется этими тремя определителями X, Y, N; этот образ мы сможем тогда считать с таким же правом новой элементарной геометрической величиной,

с каким до сих пор считали таковой площадь треугольника. Из второй однострочной матрицы возникают в качестве однострочных определителей (первого порядка) наряду с числом единица еще и сами координаты x_1, y_1; последние определяют точку с этими координатами как простейшую элементарную величину и, следовательно, не требуют дальнейших исследований.

Теперь не представит затруднения для понимания, если я сразу же выскажу *принцип Грассмана* в общем виде: *пусть для плоскости и для пространства рассматриваются все матрицы (имеющие меньше строк, чем столбцов), у которых каждая строка составлена из координат одной какой-либо точки и из единицы; требуется исследовать, какие геометрические образы фиксируются теми определителями, которые получаются из этих матриц вычеркиванием достаточного числа столбцов.* Этот принцип установлен здесь до известной степени произвольно и лишь постепенно выяснится, насколько ценным путеводителем среди множества основных геометрических образов он является; позже мы увидим в нем естественный источник большого круга идей, которые охватывают всю геометрическую систематику.

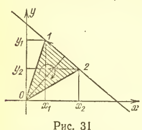


Рис. 31

Вернемся теперь опять к конкретной проблеме на плоскости: что известно о фигуре (рис. 31) из двух точек *1*, *2*, если заданы значения определителей X, Y, N? Очевидно, в положении обеих точек остается еще одна степень свободы, ибо оно вполне определяется лишь четырьмя величинами. Я утверждаю: для X, Y, N получается одна и та же тройка значений тогда и только тогда, когда точка *1* является концом, а точка *2* началом отрезка с определенной длиной и направлением, но могущего как угодно передвигаться вдоль определенной прямой; направление отрезка мы будем здесь, как и в дальнейшем, отмечать стрелкой, направленной от начальной точки *2* к конечной точке *1*.

То, что величины X, Y, N определяют собой прямую[27]), соединяющую точки *1*, *2*, непосредственно

ясно, поскольку ее уравнение

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

можно записать также в виде

$$Yx - Xy + N = 0;$$

отсюда видно также, *что эта прямая вполне определяется одними отношениями* $X:Y:N$.

Далее, на основании наших прежних исследований о длинах отрезков и площадях треугольников мы заключаем, что X и Y представляют собой проекции направленного отрезка $(1, 2)$, идущего от 2 к 1, на оси x и y, а N — удвоенную площадь треугольника $(O, 1, 2)$ с направлением обхода O, 1, 2. Очевидно, единственными изменениями в положении точек 1, 2, при которых все эти три величины остаются без изменения, являются передвижения отрезка $(1, 2)$ вдоль его прямой при сохранении его длины и направления.

Этим наше утверждение доказано. Такой отрезок определенных длины и направления, лежащий на определенной прямой, Грассман назвал *линейным элементом.* Теперь в литературе более употребительно название *вектор*, точнее, *скользящий вектор*, в отличие от обыкновенного или «свободного» вектора, для которого допускается всякий, хотя бы и выводящий его из прямой параллельный перенос, сохраняющий его длину и направление. Этот *скользящий вектор*, определяемый матрицей

$$\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{Vmatrix}$$

или соответственно определителями X, Y, N, является, следовательно, *первым элементарным геометрическим образом*, который мы рассматриваем, следуя принципу Грассмана.

Тут же замечу, что величины X, Y сами по себе определяют *свободный вектор*, ибо они не изменяются и при параллельном переносе отрезка в сторону от содержащей его прямой — аналогично тому, как отношения $X:Y:N$, эквивалентные двум величинам, определяют только неограниченную прямую, но не длину отрезка на ней. Свободный вектор и

неограниченная прямая являются, таким образом, двумя побочными образами, с которыми мы здесь встречаемся.

Принцип, который является руководящим при введении таких побочных образов, будет установлен лишь впоследствии.

Применения к статике неизменяемых систем. Эти понятия играют в механике, а именно в элементах статики, крайне важную роль; там они уже с давних пор возникли совершенно естественным путем. Сюда относится прежде всего, пока мы оперируем на плоскости, статика плоских твердых систем. А именно, здесь при геометрической трактовке «скользящий вектор» можно рассматривать как полный эквивалент приложенной к системе силы, точку приложения которой ввиду твердости тела можно произвольно передвигать вдоль прямой, содержащей направленный отрезок, изображающий эту силу.

Рис. 32

Представьте себе силу вполне в духе старой механики. В точке *2* укреплена веревка, на которую действует тяга, изображаемая по величине отрезком *1 2* (рис. 32). В качестве примера живого характера мышления старых механиков, противоположного современному абстрактному изложению, охотно укажу, что раньше обыкновенно силу изображали рукой, которая тянет веревку.

Координаты вектора X, Y называют *компонентами силы*, а координату N — *моментом вращения вокруг начала* O, ибо для расстояния прямой от O находим из ее уравнения величину

$$p = \frac{|N|}{\sqrt{X^2 + Y^2}},$$

а потому $|N|$ действительно равно произведению расстояния p на $\sqrt{X^2+Y^2}$, т. е. на величину силы. Эти три величины, вместе взятые, можно назвать *координатами силы*; аналитическое определение в каждом случае дает для них — и это особенно важно — вполне определенные знаки, которым, разумеется, можно, как и раньше, дать геометрическое истолкова-

ние. При этом, конечно, следует заметить, что ради симметрии формул мы отклонились от наиболее принятого в механике определения знака момента вращения.

А именно, обычно в качестве момента вращения употребляют определитель

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ X & Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix},$$

составленный из координат начала *2* и координат X, Y свободного вектора. Этот определитель, очевидно, противоположен по знаку нашему N. Впрочем, это небольшое расхождение, будучи однажды отмечено, вряд ли может дать повод к недоразумениям.

Первой задачей механики твердого тела является сведение произвольной системы таких сил X_i, Y_i, N_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ к одной результирующей; *аналитически* это сводится к образованию скользящего вектора с координатами

$$\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad \sum_{i=1}^{n} N_i.$$

Для *геометрического* решения этой задачи *графостатика* развивает свои очень элегантные методы. А именно, в случае двух сил пользуются просто известным правилом параллелограмма, а во всех прочих случаях прибегают к «многоугольнику сил» и к «веревочному многоугольнику». Таким образом, вообще говоря, для каждой системы сил находят в качестве ее результирующей однозначно определяемый скользящий вектор. Однако все же встречаются исключения; например, в том случае, когда система состоит из двух равных, параллельных и противоположно направленных сил X, Y, N_1 и $-X$, $-Y$, N_2 (где $N_1 \neq -N_2$), действующих вдоль различных прямых, результирующая имеет компоненты 0, 0, $N_1 + N_2$, а такие числа, очевидно, не могут быть координатами вектора. Элементарное изложение с этим явлением не может справиться как следует, и потому оно должно всегда считаться с возможностью появления таких несводимых далее так называемых *пар сил*, которые нарушают простоту и общую приложимость теорем. Однако нетрудно и эти кажущиеся исключения тоже

охватить нашей системой, если чисто формально применить наши предыдущие формулы к компонентам 0, 0, N_1+N_2. Тогда для величины результирующей получится значение $\sqrt{0^2+0^2}=0$, а для ее расстояния от начала — выражение

$$p=\frac{N_1+N_2}{0}=\infty.$$

Следовательно, если бесконечно увеличивать расстояние p обыкновенной силы от начала O и приближать к нулю ее величину $\sqrt{X^2+Y^2}$ так, чтобы произведение $p\sqrt{X^2+Y^2}$, представляющее собой момент вращения, оставалось конечным, то компоненты этой силы перейдут как раз в упомянутые исключительные значения. *Потому результирующую* 0, 0, N_1+N_2 *пары сил можно назвать бесконечно малой силой, действующей на бесконечно большом расстоянии от начала, с конечным моментом вращения.* Эта фикция очень удобна и полезна для прогресса науки; она вполне соответствует обычному введению в геометрию бесконечно удаленных элементов. Пользуясь этим расширением понятия силы, можно прежде всего высказать такое предложение, не допускающее никаких исключений:

Любое число сил, действующих в одной плоскости, всегда имеет своей результирующей некоторую силу. А элементарное изложение должно всегда в этом случае тащить за собой еще и альтернативу пары сил.

Классификация геометрических величин в зависимости от их поведения при преобразовании прямоугольных координат. Теперь я дополню эти рассуждения исследованием *поведения наших элементарных величин при преобразованиях прямоугольной системы координат*; это приведет нас к одному очень ценному принципу классификации, благодаря которому грассманова систематика впервые получает свое более тонкое осуществление.

Формулы преобразования координат, т. е. выражения координат x', y' точки по отношению к новому положению осей через ее первоначальные координаты x, y, для четырех основных преобразований прямоугольной системы координат имеют, как известно, такой вид:

1) для *параллельного переноса*

$$x' = x + a, \quad y' = y + b; \qquad (A_1)$$

2) для *поворота на угол* φ

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi; \quad (A_2)$$

3) для *зеркального отражения относительно оси* x

$$x' = x, \quad y' = -y; \qquad (A_3)$$

4) *для изменения масштаба*

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y. \qquad (A_4)$$

Составляя композиции преобразований этих четырех видов при всевозможных значениях параметров a, b, φ, λ, получаем уравнения для наиболее общего возможного *перехода* от одной прямоугольной системы координат к другой *при одновременном изменении масштаба.*

Композиции всевозможных сдвигов и поворотов соответствуют совокупности всех *собственных* (т. е. понимаемых в буквальном или собственном смысле слова) *движений* системы координат в пределах плоскости[28]).

Совокупность всех этих преобразований образует *группу*. Это означает, что композиция каждых двух из них дает снова преобразование, принадлежащее к той же совокупности, и что для каждого из этих преобразований имеется в группе обратное ему преобразование. Специальные преобразования (A), различными композициями которых можно получить все остальные, называют образующими этой группы.

Прежде чем обратиться к рассмотрению того, как при этих преобразованиях (A) изменяются наши определители X, Y, N, выскажу два общих принципа, которые я уже давно акцентировал и выдвинул на первое место при этих основных геометрических исследованиях; если эти принципы сперва и будут звучать немного неясно в таком общем виде, то на конкретном материале их суть сразу же вполне уяснится. Один из них гласит, что геометрические свойства каких-либо фигур должны всегда выражаться такими формулами, которые не изменяются при перемене системы координат, т. е. при одновременном выполнении над координатами всех точек фигуры одного из

наших преобразований, и что, *наоборот, каждая формула, инвариантная в этом смысле по отношению к группе этих преобразований координат, должна выражать некоторое геометрическое свойство*[29]). Простейшими известными всем примерами может служить выражение для расстояния в фигуре, состоящей из двух точек, или для угла в фигуре, образованной двумя прямыми; с этими и многими другими подобными формулами нам в дальнейшем постоянно придется иметь дело. А здесь для пояснения укажу еще совершенно тривиальный пример неинвариантных формул: уравнение $y=0$ для фигуры, состоящей из одной точки плоскости x, y, выражает, что эта точка лежит на оси x; ось x является, собственно говоря, совершенно произвольным дополнением, чуждым существу нашей фигуры, и служит только для удобного ее описания.

Подобно этому, всякое неинвариантное уравнение выражает то или иное отношение фигуры к произвольно присоединенным внешним вещам, в частности к системе координат, но не соответствует никаким геометрическим свойствам самой фигуры.

Второй принцип относится к *системам аналитических величин*, образованных из координат нескольких точек *1*, *2*, ..., например к системе из наших трех величин X, Y, N. О такой системе говорят, что она определяет *новый геометрический, т. е. не зависящий от системы координат образ, если при всех наших преобразованиях координат она определенным образом преобразуется в себя*, т. е. если система величин, аналогично образованная из новых координат точек *1*, *2*, ..., выражается *исключительно* (т. е. не вводя значений самих координат) через величины, образованные из старых координат. Более того, *все аналитические выражения мы будем классифицировать соответственно тому, как они ведут себя при преобразованиях координат*, и два ряда выражений, которые преобразуются одинаковым образом, будем считать равноценными, т. е. определяющими геометрические образы одного и того же типа.

Применение принципа классификации к элементарным величинам. Все это мы сейчас разъясним на том материале, который дают грассмановы элементарные величины. Для этого подвергнем обе наши

точки x_1, y_1; x_2, y_2 одному и тому же преобразованию координат. Начиная с параллельного переноса (A_1), полагаем

$$x_1' = x_1 + a, \quad x_2' = x_2 + a,$$
$$y_1' = y_1 + b, \quad y_2' = y_2 + b.$$

Сравнивая координаты линейного элемента

$$X = x_1 - x_2, \quad Y = y_1 - y_2, \quad N = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$
$$X' = x_1' - x_2', \quad Y' = y_1' - y_2', \quad N' = x_1' y_2' - x_2' y_1'$$

до и после преобразования, получаем

$$1) \qquad X' = X, \quad Y' = Y, \quad N' = N + bX - aY. \quad (B_1)$$

Точно таким же образом получают следующие формулы преобразования:

2) при повороте (A_2)

$$X' = X\cos\varphi + Y\sin\varphi, \quad Y' = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi, \quad N' = N; \quad (B_2)$$

3) при зеркальном отражении (A_3)

$$X' = X, \quad Y' = -Y, \quad N' = -N; \quad (B_3)$$

4) при изменении масштаба (A_4)

$$X' = \lambda X, \quad Y' = \lambda Y, \quad N' = \lambda^2 N. \quad (B_4)$$

В последних формулах (B_4) выступает различие в поведении отдельных величин, а именно, показатель той степени λ, на которую умножаются эти величины, неодинаков. В физике это различие учитывают тем, что вводят понятие размерности: говорят, что X, Y имеют размерность 1 (размерность линии), а N — размерность 2 (размерность площади).

Рассматривая эти четыре группы формул, мы прежде всего замечаем, что линейный элемент, определяемый тремя детерминантами X, Y, N, действительно удовлетворяет нашему общему определению геометрической величины: его новые координаты X', Y', N' всегда выражаются через одни только старые X, Y, N.

Мы придем к дальнейшим результатам, рассматривая только первые два уравнения каждой группы. В них совсем не входит N, следовательно, первые две

координаты X', Y' линейного элемента в новой системе координат зависят только от первоначальных значений X, Y тех же координат. При этом при параллельном переносе X, Y совсем не изменяются, а при всех прочих преобразованиях они связаны такими же соотношениями с X', Y', которыми старые координаты x, y любой точки связаны с ее же новыми координатами x', y'. Поэтому согласно только что высказанному второму принципу, можно утверждать, что уже две первые координаты X, Y определяют некоторый геометрический образ независимо от системы координат, и этим образом является, как мы знаем уже, свободный вектор. Здесь мы встречаемся с намеченным выше принципом систематики, который побуждает ввести этот образ (свободный вектор) наряду с линейным элементом.

К той же области идей принадлежит также следующее соображение: поскольку X', Y', N' входят во все четыре группы формул в виде линейных *однородных* функций от X, Y, N, то посредством деления каждых двух уравнений находим, что отношения $X' : Y' : N'$ зависят тоже только от отношений[30] $X : Y : N$. Поэтому *эти отношения* сами по себе (безотносительно к значениям самих величин X, Y, N) тоже должны определять независимо от системы координат некоторый *геометрический образ*, и, в самом деле, мы уже раньше установили, что этим образом является *неограниченная прямая*.

Применяя наши формулы (B) к частному случаю «пары сил», т. е. полагая $X = Y = 0$, находим, что во всех четырех случаях $X' = Y' = 0$, а для N' получаем соответственно

$$N' = N, \qquad (C_1)$$

$$N' = N, \qquad (C_2)$$

$$N' = -N, \qquad (C_3)$$

$$N' = \lambda^2 N. \qquad (C_4)$$

Пользуясь обычным термином «инвариант» для обозначения величины, которая при всех операциях некоторой группы преобразований либо совсем не изменяется, либо самое большее умножается на некоторый множитель, и называя этот инвариант абсолютным или относительным в зависимости от того,

будет ли упомянутый множитель равен единице или нет[31]), можно выразить формулы (C) такими словами: *момент вращения пары сил является относительным инвариантом при всех ортогональных преобразованиях координат на плоскости.*

Сравним теперь с этим результатом поведение при преобразованиях координат элементарной геометрической величины, которую мы изучали в самом начале, а именно, *площади треугольника*

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Параллельный перенос (A_1) не изменяет величины этого определителя, ибо при нем только прибавляется к элементам первого столбца число a, а к элементам второго — число b, т. е. прибавляются a-кратные и соответственно b-кратные элементов последнего столбца:

$$\Delta' = \Delta. \qquad (D_1)$$

Столь же просто находим поведение определителя Δ в случае трех прочих видов преобразований:

$$\Delta' = \Delta, \qquad (D_2)$$

$$\Delta' = -\Delta, \qquad (D_3)$$

$$\Delta' = \lambda^2\Delta, \qquad (D_4)$$

о чем, конечно, можно было бы и непосредственно заключить, исходя из геометрического смысла площади треугольника. Но эти формулы вполне совпадают с формулами (C); следовательно, площадь треугольника, а потому и *площадь всякой плоской фигуры* (которую ведь можно представить как сумму треугольников), ведет себя при произвольном преобразовании координат точно таким же образом, как *момент вращения пары сил.* Поэтому, следуя нашему второму общему принципу, мы должны обе эти вещи рассматривать как геометрически эквивалентные, понимая это в таком смысле: имея на плоскости какую-либо пару сил с моментом N и взяв любой треугольник с площадью $\Delta = N$, мы найдем, что это последнее равенство сохраняется при всех преобразованиях координат, т. е. мы можем *момент вращения пары*

сил представить наглядно независимо от преобразования координат в виде площади треугольника или параллелограмма или еще какой-нибудь иной фигуры. Каким именно образом это сопоставление должно происходить геометрически, будет видно позже при изучении совершенно аналогичных, но немного более сложных, а потому и более поучительных соотношений в пространстве.

На этом я покину геометрию на плоскости, в которой эти понятия имеют почти тривиальную простоту. Для всех аналитических формул удается непосредственно подыскать их хорошее геометрическое толкование, причем и на геометрию распространяется сама собой полная аналитическая общность. При этом всегда является существенным то предположение — пусть это будет еще раз подчеркнуто, — что раз навсегда установлены надлежащие соглашения относительно знаков $\pm$ в геометрических образах.

III. ГРАССМАНОВ ПРИНЦИП ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА

Линейный и плоскостной элементы. Соответствующие исследования, относящиеся к пространству, мы проведем вполне аналогично предыдущим рассуждениям. Таким образом, исходным пунктом будут служить матрицы, составленные из координат одной, двух, трех или четырех точек:

$$\| x_1\ y_1\ z_1\ 1 \|, \quad \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Определителями первой матрицы являются координаты точки; они не требуют дальнейших исследований. Четвертая матрица уже сама является определителем четвертого порядка и дает, как известно, ушестеренный объем тетраэдра (*1, 2, 3, 4*), который можно, в соответствии с вводимыми в дальнейшем терминами, назвать *пространственным элементом.* Впрочем, этот определитель можно также рассматривать просто как объем параллелепипеда с ребрами *4 1*, *4 2*, *4 3* (рис. 33), для которого Грассман ввел название «шпат» (термин, заимствованный из минералогии).

Новые образы получаются из второй и третьей матриц. Вторая (двустрочная) матрица позволяет получить совокупность следующих шести определителей второго порядка, которые мы получаем, вычеркивая каждый раз по два столбца [32]):

$$X = x_1 - x_2, \quad Y = y_1 - y_2, \quad Z = z_1 - z_2,$$
$$L = y_1 z_2 - y_2 z_1, \quad M = z_1 x_2 - z_2 x_1, \quad N = x_1 y_2 - x_2 y_1; \tag{1}$$

точно так же третья (трехстрочная) матрица дает нам следующие четыре определителя третьего порядка:

$$\mathfrak{L} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{M} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix},$$
$$\mathfrak{N} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{P} = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Что касается, прежде всего, шести определителей (1), то из соответствующих разъяснений, относящихся к плоскости, можно легко заключить, что X,

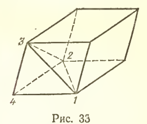


Рис. 33

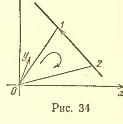


Рис. 34

Y, Z являются проекциями на координатные оси отрезка, идущего от точки *2* к *1*, а L, M, N — удвоенными площадями проекций треугольника (O, *1*, *2*) с направлением обхода O, *1*, *2* на координатные плоскости (рис. 34). Все эти величины остаются, очевидно, неизменными, если отрезок (*1*, *2*) передвигать вдоль содержащей его прямой, сохраняя его длину и направление; следовательно, они представляют собой то, что мы будем называть линейным элементом или *скользящим вектором в пространстве*. Первые три величины X, Y, Z остаются неизменными также и при параллельном переносе этого вектора в сторону

от содержащей его прямой; следовательно, взятые сами по себе они определяют *свободный вектор*. Подобно этому пять *отношений* $X:Y:\ldots:Z$ остаются неизменными как при произвольном изменении длины, так и при изменении на обратное направления этого линейного элемента на фиксированной прямой; следовательно, они определяют *неограниченную прямую*.

Четыре определителя (2) определяют прежде всего плоскость, проходящую через три точки *1*, *2*, *3*, ибо ее уравнение

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

можно, очевидно, записать так:

$$\mathfrak{L}x + \mathfrak{M}y + \mathfrak{N}z + \mathfrak{P} = 0,$$

так что уже одни только отношения $\mathfrak{L}:\mathfrak{M}:\mathfrak{N}:\mathfrak{P}$ фиксируют некоторую неограниченную плоскость [33]). Далее мы сразу же замечаем, что $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ равны удвоенным площадям проекций треугольника (*1*, *2*, *3*) на координатные плоскости, если брать его каждый раз с направлением обхода *1*, *2*, *3*, а $\mathfrak{P}$ равно шестикратному объему тетраэдра (*O*, *1*, *2*, *3*), тоже взятому со знаком, соответствующим этой последовательности вершин. Эти четыре величины остаются, очевидно, неизменными в том и только в том случае, если треугольник (*1*, *2*, *3*) передвигать по его плоскости и так его при этом деформировать, чтобы его площадь и направление обхода оставались неизменными. Следовательно, они определяют треугольник или вообще часть плоскости, имеющую именно такую подвижность, — то, что Грассман называет «плоскостным элементом». Первые три координаты $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ плоскостного элемента остаются без изменения также и при сдвиге плоскости треугольника параллельно ей самой; следовательно, они определяют площадь и направление обхода треугольника, который может свободно перемещаться в пространстве параллельно самому себе, — так называемый *свободный плоскостной элемент*.

Желая заняться *линейным элементом* ближе, мы должны прежде всего обратить внимание на то, что в пространстве он определяется *пятью* свободно изменяемыми параметрами, ибо хотя оба его конца имеют вместе взятые шесть координат, но один конец может произвольно передвигаться вдоль некоторой прямой. Следовательно, определенные нами выше шесть координат X, Y, Z, L, M, N линейного элемента не могут быть независимыми величинами, а должны удовлетворять некоторому условию. Это последнее можно проще всего вывести из учения об определителях, которое вообще служит всегда ключом к нашим теориям. Рассматриваем определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

который, конечно, тождественно равен нулю, ибо элементы двух его строк попарно совпадают. Разложим его на сумму произведений из соответственных миноров[34]) первой и последней пары строк: первое слагаемое содержит оба минора, обведенные пунктиром, следовательно, оно сводится к NZ; по аналогии с этим для всего определителя получаем значение $2\,(NZ + MY + LX)$. Поэтому имеет место тождество

$$XL + YM + ZN = 0 \tag{3}$$

в качестве *необходимого условия* для шести координат всякого линейного элемента; нетрудно убедиться в том, что наличие соотношения (3) между какими-нибудь шестью величинами является также и *достаточным условием*[35]) для того, чтобы их можно было представить посредством формул (1) в качестве координат некоторого линейного элемента. Конечно, я не стану здесь останавливаться на этом совершенно элементарном доказательстве[36]).

Применение к статике твердых тел. Теперь я снова перейду к *применению этих понятий в механике.* Как и на плоскости (с. 40), представителем *силы, приложенной к пространственному твердому телу*, является линейный элемент, изображающий линию приложения,

величину и направление этой силы. При этом первые три координаты X, Y, Z линейного элемента называются компонентами силы, параллельными координатным осям, а его вторые три координаты L, M, N — ее *моментами вращения вокруг этих осей**). Три компоненты X, Y, Z определяют собой, кроме величины, еще и направление силы, или соответственно свободный вектор с направляющими косинусами, относящимися между собой, как $X:Y:Z$; это направление изображается диагональю параллелепипеда, ребрами которого являются отрезки X, Y, Z на координатных осях[37]). Таким же самым построением можно посредством трех величин L, M, N тоже получить определенное направление, которое называют *направлением оси результирующего момента вращения.* Соотношение (3) означает, согласно известной формуле геометрии в пространстве, *что направление силы и направление оси результирующего момента вращения взаимно перпендикулярны.* Точно так же, как и на плоскости, мы включаем в понятие линейного элемента в качестве «пары сил» тот предельный случай, при котором $X=Y=Z=0$, тогда как L, M, N не обращаются в нуль одновременно, и простой предельный переход показывает, что под парой сил следует понимать *бесконечно удаленную бесконечно малую силу, моменты вращения которой остаются конечными.* Элементарная теория и в этом случае относится пугливо к таким выражениям — для нее парой сил является совместное действие двух параллельных равных по величине, но противоположно направленных сил, действующих вдоль различных прямых: X, Y, Z, L_1, M_1, N_1 и $-X$, $-Y$, $-Z$, L_2, M_2, N_2.

Действительно, для суммы этих сил получаются как раз такие координаты:

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad L_1+L_2, \quad M_1+M_2, \quad N_1+N_2,$$

которые мы только что имели в виду[38]).

Наша очередная задача — *сложение системы произвольно заданных сил*

$$X_i, \quad Y_i, \quad Z_i, \quad L_i, \quad M_i, \quad N_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

*) Здесь снова наши обозначения отличаются знаком от принятых в механике (ср. с. 41).

приложенных к твердому телу. Обыкновенно в элементарных книгах и на лекциях на эту задачу затрачивают много времени, тогда как мы здесь сможем решить ее очень быстро благодаря тому, что наши аналитические формулы делают излишним различение разных случаев, неизбежное при тяжеловесном элементарном изложении, не употребляющем правила знаков. Основной принцип сложения (сил) заключается в том, что составляют суммы

$$\Xi = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \mathrm{H} = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad \mathrm{Z} = \sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} L_i, \quad \mathrm{M} = \sum_{i=1}^{n} M_i, \quad \mathrm{N} = \sum_{i=1}^{n} N_i$$

и рассматривают их как координаты системы сил или как координаты «динамы», пользуясь целесообразным выражением, введенным Плюккером; при этом мы снова различаем три компоненты вдоль осей и три момента вращения около этих осей. Но, вообще говоря, эта динама не представляет собой некоторой силы, ибо рассмотренные шесть сумм не всегда удовлетворяют условию

$$\Xi\Lambda + \mathrm{HM} + \mathrm{ZN} = 0,$$

имеющему место для координат линейного элемента. Тут мы имеем по сравнению с плоскостью то новое, что *систему сил, приложенных к твердому телу, не всегда можно свести к одной силе*[39]).

Чтобы получить конкретное представление о сущности динамы, попробуем представить ее по возможности ясным способом в виде результирующей как можно меньшего числа сил. Оказывается, что *каждую динаму можно рассматривать как результирующую одной силы и пары сил, ось которой параллельна линии, вдоль которой действует первая сила, — так называемой центральной оси динамы, — причем это сведе́ние (к силе и паре) может быть произведено одним только способом*. Классическое изложение этой теории сложения сил, приложенных к твердому телу, имеется в книге «Элементы статики» Пуансо *); поэтому говорят также о центральной оси Пуансо.

*) Poinsot L. Eléments de statique. — Paris, 1804.

Впрочем, Пуансо излагает эту теорию очень растянуто, пользуясь методами элементарной геометрии, в том виде, как еще и до сих пор поступают в начальном преподавании.

Для доказательства высказанной теоремы заметим, что[40]) всякий раз, когда по выделении (из рассматриваемой динамы) какой-либо пары сил получается одна сила, последняя должна иметь на осях компоненты, равные Ξ, H, Z; следовательно, чтобы ось пары была параллельна центральной оси, ее моменты вращения должны относиться, как $\Xi : H : Z$. Поэтому ее шестью координатами должны быть числа

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad k\Xi, \quad kH, \quad kZ,$$

где k — параметр, который еще подлежит определению. Присоединяя к этой паре сил динаму

$$\Xi, \quad H, \quad Z, \quad \Lambda - k\Xi, \quad M - kH, \quad N - kZ, \qquad (A)$$

получим исходную динаму Ξ, H, Z, Λ, M, N, и высказанное предложение было бы доказано, если бы удалось так подобрать k, чтобы система величин (A) представляла собой одну силу. Для этого необходимо и достаточно, чтобы эти координаты (A) удовлетворяли условию (3), т. е.

$$\Xi(\Lambda - k\Xi) + H(M - kH) + Z(N - kZ) = 0;$$

отсюда однозначно следует, что

$$k = \frac{\Xi\Lambda + HM + ZN}{\Xi^2 + H^2 + Z^2}.$$

В самом деле, можно считать, что знаменатель отличен от нуля, ибо в противном случае мы с самого начала имели бы дело не с собственной динамой, а только с парой сил. Таким образом, приписывая параметру k это значение — Плюккер называет его *параметром* динамы, — мы действительно получаем искомое разложение динамы на требуемые пару сил и одну силу, причем из хода доказательства видно, что это разложение однозначно.

Связь с нулевой системой Мёбиуса. Теперь возникает вопрос о том, с какими *геометрическими представлениями* можно связать это разложение. Эти исследования также восходят к *Мёбиусу*, а именно,

к его «Курсу статики» *). В своем изложении он на первое место ставит вопрос *об осях, по отношению к которым динама имеет момент вращения, равный нулю*, — о так называемых нулевых осях; систему всех таких *нулевых осей* он называет *нулевой системой*. Отсюда и ведет свое происхождение этот, конечно, известный вам термин.

Прежде всего мы должны дать общее определение понятия *момента вращения* или просто *момента*, которое будет применяться, начиная с этого места. Пусть сперва заданы в пространстве два линейных элемента

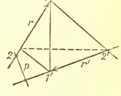


Рис. 35

(*1*, *2*) и (*1'*, *2'*) (рис. 35). Будем рассматривать их концы как вершины тетраэдра (*1*, *2*, *1'*, *2'*), объем которого равен

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя этот определитель как сумму произведений миноров первой и последней пары строк (мы это уже делали на с. 51 с определителем, тождественно равным нулю), получаем для этого определителя значение

$$\frac{1}{6}(XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ'),$$

где $X', \ldots, N'$ — координаты линейного элемента (*1'*, *2'*). Входящую сюда билинейную комбинацию координат обоих линейных элементов

$$XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ'$$

будем называть *моментом одного линейного элемента по отношению к другому*; он равен шестикратному объему тетраэдра, образованного концами обоих линейных элементов, и поэтому является геометрической величиной, не зависящей от системы координат. Если r и r' — длины линейных элементов, φ — угол

*) Möbius A. F. Lehrbuch der Statik. — Leipzig, 1837.

между ними и p — кратчайшее расстояние (общий перпендикуляр) между их прямыми, то путем элементарных геометрических соображений легко найти, что этот момент равен произведению $rr'p\sin\varphi$, если только надлежащим образом определить знак числа φ[41]).

Если же вместо линейного элемента (*1*, *2*) задана *неограниченная направленная прямая*, то под моментом линейного элемента (*1'*, *2'*) по отношению к ней будем понимать его момент в прежнем смысле, взятый по отношению к линейному элементу длины $r=1$, лежащему на этой прямой, т. е. выражение $r'p\sin\varphi$. Оно получается из предыдущего выражения делением его на $r=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, так что окончательно находим: *момент линейного элемента* X', Y', Z', L', M', N' *по отношению к неограниченной прямой, содержащей линейный элемент* X, Y, Z, L, M, N, *равен*

$$\frac{XL'+YM'+ZN'+LX'+MY'+MZ'}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};$$

фактически это выражение остается неизменным при сохранении отношений шести величин $X, Y, \ldots, N$ без изменения их знаков на противоположные, так что его значение вполне определено, если только задана упомянутая неограниченная прямая с определенным направлением на ней. Этот момент линейного элемента является как раз тем, что в статике называют *моментом вращения силы*, *изображаемой этим линейным элементом*, вокруг нашей прямой как вокруг оси; причем опять-таки в статике часто употребляют противоположный знак (ср. с. 52).

Перейдем теперь к *моменту*, или *моменту вращения* (относительно той же направленной прямой) системы сил, т. е. динамы

$$\Xi=\sum_{i=1}^{n}X'_i,\ \ldots,\ \mathrm{N}=\sum_{i=1}^{n}N'_i.$$

Представляется естественным понимать под ним сумму моментов отдельных сил, т. е. выражение

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{XL'_i+YM'_i+ZN'_i+LX'_i+MY'_i+NZ'_i}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=$$
$$=\frac{X\Lambda+Y\mathrm{M}+Z\mathrm{N}+L\Xi+M\mathrm{H}+NZ}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

При последовательном отождествлении неограниченной прямой $X, \ldots, N$ с тремя положительными осями это выражение принимает значения Λ, M, N, чем и оправдываются введенные раньше (с. 53) названия для этих величин.

Теперь мы можем заняться тем вопросом, который ставит перед собой Мёбиус. Заданная динама $\Xi, \mathrm{H}, \ldots, \mathrm{N}$ имеет по отношению к прямой $X:Y:\ldots$ $\ldots:N$ момент 0 (так что последняя является *нулевой осью*) в том и только в том случае, если числитель последнего выражения равен нулю:

$$\Lambda X + \mathrm{M}Y + \mathrm{N}Z + \Xi L + \mathrm{H}M + \mathrm{Z}N = 0.$$

Следовательно, *нулевая система динамы представляет собой совокупность всех прямых* $X:Y:\ldots$ $\ldots:N$, удовлетворяющих этому уравнению. Но это последнее является наиболее общим линейным однородным уравнением относительно шести величин $X, \ldots, N$, ибо коэффициенты $\Lambda, \ldots, \mathrm{Z}$, как координаты динамы, могут иметь произвольные значения. Совокупности прямых, определяемых произвольным линейным однородным уравнением, исследовал Плюккер — такой же, как Мёбиус, пионер в аналитической геометрии XIX столетия — под названием *линейных комплексов* в связи с вопросами, на которых нам впоследствии еще придется останавливаться подробнее. *Таким образом, мёбиусова нулевая система — то же самое, что и плюккеров линейный комплекс.*

Наглядно-геометрическое изображение нулевой системы. Постараемся теперь дать *как можно более ясную картину* этой нулевой системы, причем, конечно, не может быть и речи о геометрической «фигуре» в буквальном смысле этого слова, ибо нулевые прямые бесконечно многократно покрывают все пространство[42]). Тем не менее можно очень хорошо представить себе их группировки. При этом, следуя избранному в этом курсе методу, мы постараемся привести систему координат в как можно более удобное положение; это будет достигнуто, если выберем за *ось z центральную ось динамы.* Поскольку динаму можно, как мы знаем, представить в виде результирующей для системы, состоящей из одной силы, действующей вдоль центральной оси, и одной пары сил с параллельной ей осью, то при указанном выборе оси z

должны обратиться в нуль четыре координаты Ξ, H, Λ, M динамы, тогда как Z изобразит величину названной отдельной силы, а N — момент вращения упомянутой пары сил относительно ее оси[43]). Поэтому параметр динамы оказывается равным

$$k=\frac{\Xi\Lambda+\mathrm{HM}+\mathrm{ZN}}{\Xi^2+\mathrm{H}^2+\mathrm{Z}^2}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Z}}.$$

Уравнение линейного комплекса в этой новой системе координат получает следующий простой вид:

$$\mathrm{N}Z+\mathrm{Z}N=0$$

или после деления на Z

$$kZ+N=0. \qquad (1)$$

Этот вид уравнения мы и кладем в основу наших дальнейших исследований. Если $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$ — две точки, взятые на одной из прямых $X:Y:Z:L:M:N$ нулевой системы, то $Z=z_1-z_2$ и $N=x_1y_2-x_2y_1$, а потому для каждых двух точек, лежащих на одной нулевой прямой, из (1) получается условие

$$k(z_1-z_2)+(x_1y_2-x_2y_1)=0. \qquad (2)$$

Если фиксировать точку P_2, то (2) представит собой уравнение, связывающее координаты x_1, y_1, z_1 всех точек P_1, которые лежат вместе с P_2 на одной какой-нибудь прямой нулевой системы; заменяя для ясности x_1, y_1, z_1 текущими координатами x, y, z, найдем, что все такие точки P_1 заполняют плоскость, определяемую уравнением

$$y_2x-x_2y+kz=kz_2. \qquad (2')$$

Эта плоскость проходит через точку P_2, ибо уравнение (2′) удовлетворяется при $x=x_2$, $y=y_2$, $z=z_2$. Этим мы доказали, что *через каждую точку P_2 пространства проходит бесчисленное множество нулевых прямых*, которые образуют плоский пучок лучей, заполняющий плоскость (2′). Наша задача будет решена, если мы составим себе ясное представление о положении этой плоскости («нулевой плоскости»), принадлежащей каждой точке P_2. Оба выражения $N=x_1y_2-y_1x_2$, $Z=z_1-z_2$, входящие в (2), имеют свойство оставаться неизменными при параллельных

переносах пространства вдоль оси z, а также при поворотах вокруг этой оси. В самом деле, указанные переносы оставляют неизменными x и y (а следовательно, и N), а также разность $z_1 - z_2$; повороты же не оказывают на координаты z (следовательно, и на Z) никакого влияния и оставляют также неизменной N как величину площади в плоскости x, y.

Поэтому *при винтовых движениях*[44]) *пространства вокруг центральной оси* (т. е. оси z) *и при параллельных переносах пространства вдоль этой оси уравнение* (2), *а вместе с ним и определяемая им нулевая система переходят в себя.*

Эта теорема облегчает нашу задачу необычайно: если только нам известна для каждой точки положительной оси x соответствующая ей нулевая плоскость, то тем самым мы знаем также нулевую плоскость, принадлежащую любой точке пространства. Ибо, сдвигая положительную полуось x вдоль оси z и поворачивая ее вокруг последней, можно в любую точку пространства перевести некоторую точку полуоси x; при этом, согласно нашей теореме, принадлежащие этим точкам нулевые плоскости должны совпасть. Другими словами: *нулевые плоскости точек всякой полупрямой, перпендикулярной центральной оси, имеют относительно этой последней и относительно полупрямой положение, не зависящее от выбора этой полупрямой.*

Поэтому, ограничиваясь осью x, полагаем $y_2 = z_2 = 0$ и получаем из (2′) уравнение нулевой плоскости, принадлежащей точке P_2 с абсциссой x_2:

$$kz - x_2 y = 0.$$

Эта плоскость проходит через саму ось x, ибо ее уравнение удовлетворяется тождественно при $y = z = 0$ (рис. 36). Переписав уравнение в виде $\frac{z}{y} = \frac{x_2}{k}$, мы заключаем, что угол φ наклона этой плоскости к горизонтальной плоскости (т. е. к плоскости xy) имеет следующий тангенс:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_2}{k};$$

поэтому теперь положение нашей плоскости является вполне определенным; на рис. 37 изображен ее след на вертикальной плоскости yz.

В связи со сказанным ранее мы можем этот результат сформулировать совершенно независимо от того или другого выбора системы координат в таком виде: каждой точке, находящейся на расстоянии r от

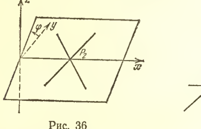


Рис. 36

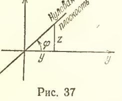


Рис. 37

центральной оси (которую будем считать вертикальной), принадлежит в нулевой системе плоскость, которая проходит через перпендикуляр, опущенный из этой точки на центральную ось, и наклонена к горизонтальной плоскости под углом, тангенс которого равен r/k. Следовательно, при передвижении этой точки вдоль какой-либо полупрямой, перпендикулярной центральной оси, принадлежащая этой точке плоскость нулевой системы при $r=0$ горизонтальна, а при возрастании r поворачивается в ту или другую сторону (в зависимости от знака числа k), асимптотически приближаясь при неограниченном возрастании r к вертикальному положению.

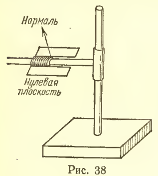


Рис. 38

Я могу вам наглядно представить эти отношения на модели Шиллинга (рис. 38). Здесь на подвижном стержне, который может поворачиваться вокруг центральной оси и передвигаться вдоль нее, помещен плоский лист, который надлежащим образом поворачивается при перемещении вдоль стержня.

Связь с теорией винтов. Обратим теперь особое внимание на направление нормали к нулевой плоскости, принадлежащей точке P_2; отношение ее направ-

ляющих косинусов равно, как известно, отношению коэффициентов уравнения (2′) этой плоскости, т. е.

$$y_2 : (-x_2) : k. \tag{3}$$

Но это направление можно также рассматривать как связанное с точкой P_2 направление некоторого *бесконечно малого винтового движения* пространства. А именно, если все пространство повернуть как твердое тело вокруг оси z на конечный угол ω и передвинуть его одновременно параллельно оси z на расстояние c, то каждая точка x, y, z перейдет в новое положение x', y', z', определяемое уравнениями

$$x' = x\cos\omega - y\sin\omega,\ \ y' = x\sin\omega + y\cos\omega,\ \ z' = z + c.$$

От этого конечного винтового движения перейдем к бесконечно малому, заменяя ω бесконечно малой величиной $-d\omega$ и принимая одновременно $c = k\,d\omega$. Знак минус означает здесь, что при $k > 0$ поворот в плоскости xy отрицателен, если перенос произведен в положительном направлении z, т. е. что направление винтового движения отрицательно (левое или леворащающее винтовое движение). Пренебрегая величинами второго и высших порядков по отношению к $d\omega$, следовательно, полагая $\cos d\omega = 1$, $\sin d\omega = d\omega$, получаем

$$x' = x + y\,d\omega, \quad y' = -x\,d\omega + y, \quad z' = z + k\,d\omega.$$

Следовательно, приращениями координат определенной точки P_2 при этом бесконечно малом винтовом движении являются

$$dx_2 = y_2\,d\omega, \quad dy_2 = -x_2\,d\omega, \quad dz_2 = k\,d\omega,$$

т. е. P_2 перемещается в направлении

$$dx_2 : dy_2 : dz_2 = y_2 : (-x_2) : k.$$

А это в точности совпадает с направлением нормали (3). Следовательно, если произвести такое бесконечно малое винтовое движение пространства вокруг центральной оси, при котором величина параллельного переноса является k-кратным угла поворота (взятого отрицательным), то в каждой точке пространства принадлежащая ей плоскость нулевой системы с параметром k нормальна к бесконечно малому отрезку траектории, пробегаемой этой точкой.

Поскольку представление о винтовом движении является очень наглядным, можно, пользуясь сказанным выше, составить себе живую картину расположения плоскостей нулевой системы. Чем больше, например, расстояние r от точки до центральной оси, тем длиннее горизонтальная проекция $r\,d\omega$ элемента пути, описываемого этой точкой при винтовом движении, и потому тем более отлого расположен этот элемент, ибо его высота $k\,d\omega$ постоянна, а значит, тем круче подымается нормальная к этому элементу пути плоскость нулевой системы. Если соединить бесчисленное множество таких бесконечно малых винтовых движений в одно непрерывное винтовое движение пространства, то каждая точка, лежащая на расстоянии r от центральной оси, описывает *винтовую линию*. Угол наклона этой линии к горизонту имеет тангенс, равный $-k/r$, а потому шаг винта имеет всегда одно и то же не зависящее от r значение $2\pi k$; *плоскости, нормальные к этим винтовым линиям, и являются нулевыми плоскостями системы.*

До сих пор мы говорили только о нулевых плоскостях системы; теперь, в заключение, постараемся составить непосредственно наглядную картину самих нулевых осей. Возьмем какую-либо нулевую ось g (рис. 39) и построим кратчайшее расстояние от нее до центральной оси как общий перпендикуляр этих двух прямых. Пусть он пересекает центральную ось в точке Q, а ось g — в точке P. Тогда PQ как полупрямая, идущая из P перпендикулярно центральной оси, принадлежит нулевой системе, а поэтому плоскость QPg должна быть нулевой плоскостью системы, принадлежащей точке P. Но так как ось g перпендикулярна прямой PQ, то она образует с горизонтальной плоскостью такой же угол φ, как и нулевая плоскость в точке P, т. е. $\operatorname{tg}\varphi = r/k$, где $r = QP$.

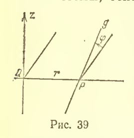


Рис. 39

Следовательно, мы получим все нулевые оси, проводя в точке P, расположенной на полупрямой, перпендикулярной центральной оси, такой перпендикуляр к этой полупрямой, чтобы угол его наклона к гори-

зонту имел тангенс, равный $\operatorname{tg}\varphi = r/k$, где r — расстояние от точки P до центральной оси [45]).

Это построение можно сделать еще немного более наглядным, поступая следующим образом: строим круговой цилиндр радиуса r, имеющий центральную ось динамы своей осью, и чертим на нем все винтовые линии (рис. 40) с наклоном φ к горизонту, определяемым из равенства $\operatorname{tg}\varphi = r/k$; тогда совокупность всех касательных к этим винтовым линиям тождественна, очевидно, с совокупностью всех нулевых осей, проходящих на расстоянии r от центральной оси. Варьируя r, получаем все нулевые оси. Эти винтовые линии при удалении от центральной оси становятся, очевидно, все круче; в каждой точке такой линии нулевая плоскость, принадлежащая этой точке, служит также соприкасающейся плоскостью рассматриваемой линии. Поэтому эти винтовые линии проходят перпендикулярно к ранее упомянутым винтовым линиям, которые в каждой своей точке нормальны к соответствующей нулевой плоскости.

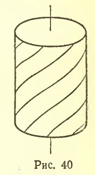


Рис. 40

После этих рассуждений, вскрывших двойную связь нулевой системы с винтами, становится понятным, почему всю эту теорию называют также коротко теорией винтов (или «винтовым исчислением»); в частности, это название употребил Болл, написавший книгу «Теория винтов» *), где он действительно изучает все геометрические соотношения, связанные с заданной динамой, приложенной к твердому телу.

Вернемся теперь к нашему систематическому развитию идей. Следуя грассманову принципу, мы получили в качестве четырех элементарных геометрических пространственных образов *точку*, *линейный элемент*, *плоскостной элемент* и *пространственный элемент*. Точно так же, как и на плоскости, нашей ближайшей задачей будет исследование поведения этих образов при преобразованиях прямоугольной системы координат и затем их классификация на основании ранее высказанного общего принципа.

*) Ball R. Theory of screws. — Dublin, 1876.

IV. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБРАЗОВ ПО ИХ ПОВЕДЕНИЮ ПРИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ

Общие замечания о преобразованиях прямоугольных пространственных координат. Прежде всего мы, конечно, должны заняться обзором всех возможных преобразований пространственной ортогональной системы координат; они вообще играют фундаментальную роль для всей геометрии пространства, так что уже поэтому нельзя было бы в этом курсе пройти мимо них.

Самое общее относящееся сюда изменение системы координат слагается, как и на плоскости, из: 1) параллельного переноса; 2) поворота вокруг начала; 3) зеркального отражения; 4) изменения масштаба. Уравнениями *параллельного переноса*, конечно, будут

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c. \qquad (\mathrm{A}_1)$$

Уравнения *поворота* во всяком случае имеют вид

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \quad y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \quad z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z; \qquad (\mathrm{A}_2)$$

определением их коэффициентов, которое здесь существенно сложнее, чем на плоскости, мы сейчас же займемся.

Посредством композиции всех возможных преобразований этих двух видов получаются все *собственные* (т. е. понимаемые в собственном или буквальном смысле слова) движения пространственной системы координат [46]).

Зеркальное отражение (*симметрию*) можно производить прежде всего относительно какой-нибудь из координатных плоскостей (как на плоскости относительно одной из осей), например относительно плоскости xy, что дает

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z.$$

Еще одна симметрия описывается формулами, которые имеют более симметричный вид, использующий три отрицательных знака:

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z; \qquad (\mathrm{A}_3)$$

это — *зеркальное отражение* (*симметрия*) *относительно начала координат Q*.

На плоскости уравнения $x' = -x$, $y' = -y$ соответствуют не зеркальному отражению[47]), а повороту на 180°; вообще симметрия относительно начала координат является зеркальным отражением только в пространствах нечетного числа измерений, при четном же числе измерений она представляет собой обыкновенный поворот.

Наконец, *изменение масштаба* изображается уравнениями

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \lambda z, \tag{A_4}$$

где $\lambda > 0$; при $\lambda < 0$ это преобразование, кроме изменения масштаба, содержит еще зеркальное отражение.

Займемся теперь ближе формулами поворота. Вообще, поворот около начала Q зависит, как известно, *от трех параметров*, так как, во-первых, три направляющих косинуса оси поворота соответствуют двум независимым величинам и, во-вторых, угол поворота может быть произвольным. Удобное описание всех поворотов посредством трех параметров дает, как я это показал в моем зимнем курсе *), теория кватернионов.

Впрочем, уже Эйлер вывел относящиеся сюда формулы. Я приведу их в том виде, в каком обыкновенно их дают в учебниках механики, а именно, пользуясь девятью направляющими косинусами новых осей по отношению к старым. Исходим из приведенного выше вида (A_2) уравнений преобразования:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z, \quad y' = a_2x + b_2y + c_2z,$$
$$z' = a_3x + b_3y + c_3z. \tag{1}$$

Если x, $y = 0$, $z = 0$ — какая-либо точка на старой оси x, то в новой системе координат она имеет координаты $x' = a_1x$, $y' = a_2x$, $z' = a_3x$, т. е. a_1, a_2, a_3 *являются косинусами углов между старой осью x и тремя новыми осями*; точно так же b_1, b_2, b_3 и c_1, c_2, c_3 являются направляющими косинусами осей y и z (в новой системе).

*) См. т. 1, с. 105—110.

Эти девять коэффициентов уравнений преобразования отнюдь не являются независимыми. Связывающие их уравнения можно получить либо из только что указанного смысла этих величин, либо из известного соотношения, которое имеет место при всякой *ортогональной подстановке*, т. е. при всяком повороте или зеркальном отражении с сохранением начала координат:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{2}$$

Оно выражает инвариантность расстояния до начала Q.

Мы избираем здесь второй путь:

α) Подставляя (1) в (2) и сравнивая коэффициенты, получаем следующие 6 соотношений между 9 величинами $a_1, \ldots, c_3$:

$$\begin{gathered} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1, \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0, \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0, \quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

β) Умножая три уравнения (1) соответственно на три величины a_i или соответственно b_i, c_i и складывая, получим на основании (3) следующие соотношения, представляющие собой решения уравнений (1) относительно x, y, z:

$$\begin{gathered} x = a_1x' + a_2y' + a_3z', \quad y = b_1x' + b_2y' + b_3z', \\ z = c_1x' + c_2y' + c_3z'; \end{gathered} \tag{4}$$

это, как видим, так называемая *транспонированная относительно* (1) *линейная подстановка*, которая получается при перемене местами строк и столбцов в матрице коэффициентов.

γ) С другой стороны, по правилам теории определителей получаем такое решение уравнений (1):

$$x = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x' & b_1 & c_1 \\ y' & b_2 & c_2 \\ z' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ \ldots,$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ есть определитель этой системы

уравнений. Здесь коэффициент при x' должен быть одинаков с коэффициентом при x' в первом уравнении (4), т. е.

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1; \tag{5}$$

вообще, таким образом получаем, что *каждый коэффициент ортогональной подстановки должен быть равен соответствующему ему минору, деленному на определитель* Δ.

δ) Вычислим теперь этот определитель Δ системы коэффициентов; для этого, пользуясь теоремой об умножении определителей, составляем его квадрат:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 & c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 \\ a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix},$$

причем столбцы первого определителя мы умножаем на столбцы второго [48]). По формулам (3) для этого квадрата мы получаем

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

так что окончательно находим

$$\Delta = \pm 1.$$

Чтобы остановить наш выбор на одной из этих возможностей, вспомним, что до сих пор мы пользовались только соотношением (2), которое имеет место как при повороте, так и при зеркальном отражении. Но среди всех этих ортогональных преобразований повороты характеризуются тем, что они *получаются из тождественного преобразования* $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ *путем непрерывного изменения* коэффициентов соответственно непрерывному перемещению системы координат из первоначального положения в новое; в противоположность этому подстановка, которую мы, вообще, называем зеркальным отражением, получа-

ется непрерывным изменением из симметрии $x'=-x$, $y'=-y$, $z'=-z$; сама же эта симметрия не может быть получена из тождественного преобразования путем непрерывного изменения[49]). С другой стороны, определитель преобразования является непрерывной функцией коэффициентов и потому должен во время непрерывного перехода от тождественного преобразования к какому-нибудь повороту изменяться непрерывно.

Но при этом исходном преобразовании этот определитель имеет значение

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1,$$

а поскольку он, как мы видели, вообще, может быть равным только $+1$ или -1, то он обязательно должен всегда оставаться равным $+1$, так как внезапный переход от $+1$ к -1 означал бы разрыв непрерывности.

Итак, *при всяком повороте* определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +1. \qquad (6)$$

Точно так же *для всякого зеркального отражения получается* $\Delta = -1$.

Теперь формула (5) принимает такой простой вид:

$$a_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad (7)$$

и, вообще, всякий *коэффициент в координатной записи поворота прямоугольной системы координат равен соответствующему ему минору.*

Формулы преобразования некоторых элементарных величин. Теперь мы обращаемся к нашей настоящей задаче: установить, как ведут себя координаты элементарных пространственных образов (линейного элемента X, Y, Z, L, M, N, плоскостного элемента $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ и, наконец, пространственного элемента T) при четырех видах изменения прямоугольной системы координат.

Выписывать все формулы преобразований было бы и длинно, и скучно; поэтому отмечу только некото-

рые моменты, заслуживающие особого интереса. Замечу прежде всего, что во всех формулах преобразования координат линейного элемента его первые три координаты X', Y', Z' в новой системе выражаются, в чем вы сами легко убедитесь, исключительно через X, Y, Z, т. е. так, что L, M, N совсем не входят в их выражения; при этом новые координаты выражаются через старые линейно-однородно.

Следовательно, согласно ранее высказанному общему принципу (с. 43—44), *совокупность трех величин* X, Y, Z уже сама по себе *определяет некоторый геометрический образ, не зависящий от системы координат.* Это — *свободный вектор*, о котором мы уже упоминали (с. 49—50).

Точно так же в случае плоскостного элемента в формулы преобразования его трех координат $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ четвертая $\mathfrak{P}$ не входит, так что и эти три координаты тоже имеют не зависящее от координат геометрическое значение; они определяют ранее упомянутый *свободный плоскостной элемент* (с. 50).

Вычислим теперь, как, в частности, ведут себя *три координаты свободного вектора* X, Y, Z при наших преобразованиях (A_1), ..., (A_4) (с. 64—65). Для этого в равенства $X' = x_1' - x_2'$, ... подставляем вместо x_1', ... их выражения по формулам (A_i) через x, y, z. Это сразу же дает нам:

1. При параллельном переносе

$$X' = X, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z. \tag{B_1}$$

2. При повороте

$$X' = a_1X + b_1Y + c_1Z, \quad Y' = a_2X + b_2Y + c_2Z, \quad Z' = a_3X + b_3Y + c_3Z. \tag{B_2}$$

3. При симметрии относительно начала координат

$$X' = -X, \quad Y' = -Y, \quad Z' = -Z. \tag{B_3}$$

4. При изменении масштаба

$$X' = \lambda X, \quad Y' = \lambda Y, \quad Z' = \lambda Z. \tag{B_4}$$

Итак, при *параллельном переносе* системы координат координаты свободного вектора совсем не *изменяются*, а при *прочих преобразованиях* они ведут себя таким же образом, как *координаты точки.*

Сравним с этим результатом формулы преобразования для *пары сил*, которые мы получим из формул преобразования координат линейного элемента, полагая дополнительно $X = Y = Z = 0$. Тогда, конечно, будет $X' = Y' = Z' = 0$, а для моментов вращения по отношению к новым осям получаются такие формулы:

1. При переносе

$$L' = L, \quad M' = M, \quad N' = N. \qquad (C_1)$$

2. При повороте

$$L' = a_1L + b_1M + c_1N, \quad M' = a_2L + b_2M + c_2N, \quad N' = a_3L + b_3M + c_3N. \qquad (C_2)$$

3. При симметрии относительно начала координат

$$L' = L, \quad M' = M, \quad N' = N. \qquad (C_3)$$

4. При изменении масштаба

$$L' = \lambda^2 L, \quad M' = \lambda^2 M, \quad N' = \lambda^2 N. \qquad (C_4)$$

Как видим, при *параллельном переносе* системы координат и при симметрии относительно начала координаты пары сил *не изменяются* вовсе; при повороте они ведут себя, как *координаты точки*, а *при изменении масштаба умножаются на* λ^2, т. е. имеют измерение 2 (измерение площади), тогда как свободный вектор имеет измерение 1 (как и координаты точки).

Вывод формул (C_1), (C_3), (C_4) не представляет никаких трудностей[50]); только для (C_2) будут, пожалуй, уместны некоторые разъяснения. А именно, при помощи поворота (A_2) получаем

$$L' = \begin{vmatrix} y_1' & z_1' \\ y_2' & z_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 & a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1 \\ a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 & a_3x_2 + b_3y_2 + c_3z_2 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая последний определитель, получаем $3\cdot 3 + 3\cdot 3 = 18$ членов, среди которых три пары (например, $a_2x_1 \cdot a_3x_2 - a_3x_1 \cdot a_2x_2, \ldots$) взаимно уничтожаются; оставшиеся 12 членов можно соединить в следующую сумму произведений определителей:

$$L' = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

По формуле (7) для миноров системы коэффициентов поворота (с. 68) первые множители оказываются как раз равными a_1, b_1, c_1, тогда как вторые множители равны L, M, N. Это действительно дает приведенную ранее формулу для L'; точно так же выводятся две другие формулы для M' и N'.

Наконец, в качестве третьего образа рассмотрим *свободный плоскостной элемент*; совершенно простые вычисления, подобные предыдущим, выполнение которых я, конечно, могу предоставить вам самим, приводят к такому результату: *компоненты* $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ свободного плоскостного элемента *во всех случаях* преобразуются *совершенно таким же образом, как координаты* L, M, N *пары сил.*

Для лучшего обозрения всех этих результатов сведем их в нижеследующую *маленькую табличку*. Она дает преобразованные первые координаты, из которых остальные получаются циклической перестановкой букв:

	Перенос	Поворот	Симметрия	Изменение масштаба
Свободный вектор	X	$a_1X + b_1Y + c_1Z$	$-X$	λX
Пара сил	L	$a_1L + b_1M + c_1N$	L	λ^2L
Свободный плоскостной элемент	$\mathfrak{L}$	$a_1\mathfrak{L} + b_1\mathfrak{M} + c_1\mathfrak{N}$	$\mathfrak{L}$	$\lambda^2\mathfrak{L}$

Пара сил и свободный плоскостной элемент как эквивалентные образы. Это дает нам точную основу для ряда геометрических предложений, которые в учебниках часто или совсем отсутствуют, или упоминаются лишь мимоходом и притом в такой форме, что не так-то легко можно уловить их простой геометрический смысл. Между различными геометрическими образами, которые мы здесь рассматриваем, часто не проводят того четкого различения, которое мы считаем обязательным, и этим совершенно затушевывают целый ряд интересных соотношений. Так, например, уже у Пуансо понятия пары сил и свободного плоскостного элемента всегда бывают с самого начала неразрывно связаны между собой; разумеется, это неизбежно должно затруднять понимание; мы же только из сравнения последних двух строк нашей

таблички впервые получаем указание на то, что, согласно высказанному ранее общему принципу, *пару сил и свободный плоскостной элемент следует рассматривать как основные геометрические понятия одного и того же рода*, ибо они при всех изменениях прямоугольной системы координат ведут себя совершенно одинаково.

Разъясним точнее смысл последнего утверждения. Если, например, заданной паре сил L, M, N сопоставить некоторый плоскостной элемент при помощи равенств $\mathfrak{L} = L$, $\mathfrak{M} = M$, $\mathfrak{N} = N$ (или если сделать то же самое в обратном порядке, исходя из $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$), то это равенство координат (пары и элемента) сохраняется при всяком преобразовании системы координат и поэтому должно допускать чисто геометрическое описание, не связанное ни с какой системой координат. Для того чтобы получить такое описание, будем исходить из плоскостного элемента $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, причем ради максимального удобства фиксируем координатную систему так, чтобы было $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = 0$. Тогда этот свободный плоскостной элемент представит собой такой треугольник (*1*, *2*, *3*), параллельный плоскости xy или, в частности, лежащий на ней, что $\mathfrak{N}$ будет равно удвоенной его площади, т. е. площади параллелограмма (*1*, *1'*, *2*, *3*), снабженной знаком, определяемым обходом *1*, *1'*, *2* (рис. 41).

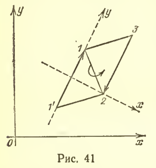


Рис. 41

Так вот я утверждаю, что соответствующая этому элементу пара сил с моментами $L = 0$, $M = 0$, $N = \mathfrak{N}$ может быть составлена из двух противоположных сторон (*1*, *1'*) и (*2*, *3*) этого параллелограмма с остриями стрелок в точках *1* и *2*.

Для доказательства я выбираю систему координат на плоскости xy еще удобнее, а именно за ось y беру прямую *1*, *1'*, ось x провожу через точку *2* (на рис. 41 эти оси нанесены штриховыми линиями).

Тогда, прежде всего, оба линейных элемента (*1*, *1'*) и (*2*, *3*), а поэтому и составленная из них пара сил имеет моменты вращения $L = 0$ и $M = 0$. Далее,

для линейного элемента $(1, 1')$ третий момент также равен нулю, так что окончательно N оказывается равным моменту вращения для $(2, 3)$:

$$N = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2 y_3,$$

ибо по условию $x_2 = x_3$ и $y_2 = 0$. С другой стороны, при таком положении координатной системы третья координата плоскостного элемента равна

$$\mathfrak{N} = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_2 y_3$$

(т. е. равна произведению основания y_3 и высоты x_2 параллелограмма), и потому даже по знаку $N = \mathfrak{N}$, чем и доказано наше утверждение.

Этот результат можно сразу высказать в общем виде, не связывая его с какой-либо специальной системой координат: *свободный плоскостной элемент, изображаемый параллелограммом с определенным направлением обхода, и пара сил, состоящая из двух противоположных сторон этого параллелограмма, направленных против его обхода, являются геометрически эквивалентными образами, т. е. они имеют по отношению ко всякой прямоугольной системе координат равные компоненты.* Это предложение позволяет всегда заменять как пару сил параллелограммом, так и этот последний парой сил.

Свободный линейный элемент и свободный плоскостной элемент («полярный» и «аксиальный» векторы). Теперь нам незачем больше заботиться о второй строке нашей таблички (с. 71); остается еще сравнить первую и третью строки, т. е. *свободный вектор* и *свободный плоскостной элемент.* Здесь мы видим прежде всего, что при параллельных переносах и поворотах оба они ведут себя совершенно одинаково; однако при зеркальном отражении и изменении масштаба обнаруживается их различие. Чтобы проследить за этим в деталях, представим себе в привычной для нас (правой) системе координат некоторый плоскостной элемент $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и свяжем с ним свободный вектор равенствами $X = \mathfrak{L}$, $Y = \mathfrak{M}$, $Z = \mathfrak{N}$.

Хотя эти равенства сохраняются, если ограничиваться собственными движениями системы координат,

но при зеркальных отражениях или при изменениях масштаба они испытывают изменения.

Поэтому, если мы захотим выразить их геометрически, то не сможем обойтись без использования как ориентации системы координат (левая, правая), так и масштаба. В самом деле, фиксируя опять, как и раньше, систему координат так, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = 0$, а $\mathfrak{N}$ равно площади параллелограмма (1, $1'$, 2, 3) на плоскости xy, получаем для нашей фигуры (рис. 42), что $\mathfrak{N} > 0$, а вектор $X = 0$, $Y = 0$, $Z = \mathfrak{N}$ имеет положительное направление оси z. Этот факт можно, очевидно, высказать в такой не зависящей от специального положения системы координат форме: для получения в правой системе координат свободного вектора, имеющего координаты, равные координатам заданного свободного плоскостного элемента, следует восставить к его плоскости перпендикуляр в ту сторону, откуда обход изображающего его параллелограмма представляется направленным против часовой стрелки, и отложить на нем отрезок, равный площади этого параллелограмма. Совпадение координат этого вектора и плоскостного элемента сохраняется при любых параллельных переносах и поворотах системы координат; однако оно нарушается, как только произведено изменение масштаба или зеркальное отражение. Если заменить измерения в сантиметрах измерениями в дециметрах, то мера площади перейдет в ее сотую часть, а мера отложенного в качестве вектора отрезка — только в его десятую часть; точно так же при симметрии системы координат относительно начала будут менять знак координаты вектора, но не плоскостного элемента.

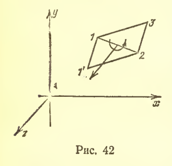


Рис. 42

Итак, свободный плоскостной элемент и свободный вектор можно вполне отождествлять между собою только тогда, когда раз навсегда установлены определенная ориентация системы координат (правая, левая) и определенная единица длины.

Конечно, такое ограничение не возбраняется допустить каждому человеку в его практике. Он должен только всегда сознавать его произвольность, чтобы по отношению к другому человеку иметь возможность понимать друг друга. Все эти вещи, как вы видите, оказываются чрезвычайно ясными и простыми, но все же к ним каждый раз приходится возвращаться, ибо в современной физике историческое развитие оставило во многих случаях некоторую запутанность. Поэтому я скажу еще несколько слов *об истории этих вещей.*

Грассманова «Теория протяжения», вышедшая в 1844 г., оказала очень незначительное влияние на нашу физику и механику по причине трудно читаемого изложения. Несравненно больший успех имели в Англии идеи, которые около этого же времени стал разрабатывать в Дублине Гамильтон — изобретатель *кватернионов*, о которых я подробно говорил в своем зимнем курсе *). Здесь мне остается только упомянуть, что ему принадлежит также слово *вектор* для обозначения того, что мы назвали *свободным вектором*; понятием же скользящего вектора он не пользуется в явном виде. Далее, он не видит разницы между *свободным плоскостным элементом* и *свободным вектором*, так как он считает заранее фиксированными определенную ориентацию и масштаб для координат. Эта точка зрения привилась в физике, и там долгое время не различали векторов в собственном смысле слова и плоскостных элементов.

Конечно, при более тонких исследованиях постепенно все же пришли к необходимости проводить различение между объектами, для которых используется одинаковое название «вектор», в зависимости от их поведения при зеркальных отражениях и для этого стали пользоваться прилагательными *полярный* и *аксиальный. Полярный вектор меняет свой знак при зеркальных отражениях* [51]), следовательно, является *вполне тождественным* с нашим *свободным вектором*; *аксиальный же вектор* [52]) *знака не меняет*, следовательно, совпадает с нашим *свободным плоскостным элементом* (причем мы не обращаем внимания на «размерность»).

*) См. т. 1, с. 88—111.

Таким образом, здесь физика должна была (как это еще до сих пор делается в обычных изложениях) констатировать задним числом это неожиданное для нее различение, между тем как при нашей общей постановке вопроса оно совершенно естественным путем получается с самого начала. Я приведу один пример для иллюстрации сказанного. Утверждение, что электрическая напряженность есть полярный вектор, означает, что она задается тремя компонентами X, Y, Z, которые преобразуются согласно первой строке нашей таблички (с. 71); говоря же, что магнитная напряженность поля есть аксиальный вектор, мы утверждаем, что три ее компоненты преобразуются по схеме последней строки этой таблички. При этом я оставляю открытым вопрос о том, как обстоит с размерностью этих величин, ибо это завело бы нас слишком далеко в глубь физических подробностей.

Скаляры первого и второго рода. Гамильтон наряду со словом «вектор» придумал еще слово «скаляр», которое тоже до сих пор играет большую роль в физике. *Скаляр — это не что иное, как инвариант относительно всех наших преобразований координат*, т. е. величина, которая при всех изменениях системы координат либо совсем не изменяется, либо только приобретает некоторый множитель. В соответствии с этим можно различать *разные оттенки в понятии скаляра*. Рассмотрим сперва в качестве примера *пространственный элемент*, или *объем тетраэдра*

$$T = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Можно легко проверить вычислением, что он в результате преобразований координат принимает следующие значения:

Перенос	Поворот	Зеркальное отражение	Изменение масштаба
T	T	$-T$	$\lambda^3 T$

Величину, которая остается неизменной при параллельных переносах и поворотах, а при зеркальном отражении меняет знак, называют *скаляром второго рода*, тогда как скаляр первого рода должен оставаться неизменным и при зеркальном отражении. При этом мы снова оставляем в стороне размерность, получаемую из четвертого столбца.

Нетрудно образовать также *скаляры первого рода*; простейшими примерами являются $X^2 + Y^2 + Z^2$, где X, Y, Z — координаты свободного вектора, и $\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2$, где $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ — координаты свободного плоскостного элемента.

Эти величины, действительно, остаются неизменными при всех собственных движениях и зеркальных отражениях (но не при изменениях масштаба). Это сразу же видно из таблички на с. 71, если еще учесть равенства (3) (с. 66) для коэффициентов поворота; поэтому эти величины должны иметь также и чисто геометрический смысл, и мы действительно знаем, что они представляют собой квадрат длины вектора или соответственно квадрат площади плоскостного элемента.

Основы векторной алгебры. Посмотрим теперь, как посредством комбинаций заданных основных образов (векторов и скаляров обоего рода) можно получать другие образы таких же типов. Начнем с совершенно простого примера. Пусть T — скаляр второго рода, например объем тетраэдра, а X, Y, Z — координаты полярного вектора; рассмотрим тройку величин TX, TY, TZ. При собственных движениях эти три величины преобразуются так же, как компоненты вектора X, Y, Z, а при симметрии системы координат относительно начала они останутся неизменными, ибо оба множителя меняют знак. Следовательно, эти три величины представляют собою *аксиальный вектор*. Точно так же, исходя из аксиального вектора $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, получим *полярный* вектор $T\mathfrak{L}, T\mathfrak{M}, T\mathfrak{N}$.

Возьмем теперь два *полярных вектора* X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 и станем составлять из них комбинации различного характера сначала в чисто аналитической форме. Исследуя затем поведение создаваемых величин при преобразованиях координат, будем заключать отсюда, к какому виду геометрических величин они принадлежат.

1) Начнем с трех сумм

$$X_1 + X_2, \quad Y_1 + Y_2, \quad Z_1 + Z_2;$$

они, очевидно, преобразуются таким же образом, как и сами компоненты вектора, и представляют собой, следовательно, новый *полярный вектор*, который с обоими заданными векторами находится в чисто геометрической связи, не зависящей от выбора системы координат.

2) Билинейная комбинация компонент обоих векторов

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

остается, как показывает вычисление, неизменной при всех собственных движениях и при зеркальных отражениях. Следовательно, она представляет собой *скаляр первого рода*, который, следовательно, также должен допускать чисто геометрическое определение.

3) Три минора матрицы

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{matrix} \right\|,$$

составленной из этих компонент, ведут себя, как легко можно вычислить, точно таким же образом, как координаты *свободного плоскостного элемента*, или *аксиального вектора*; этот последний тоже должен быть связан с заданными векторами независимо от системы координат.

4) Рассматриваем, наконец, три *полярных вектора* и составляем из их девяти компонент определитель

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix};$$

он остается неизменным при всех собственных движениях, при симметрии же он меняет знак, так что он определяет собой *скаляр второго рода*.

Теперь я дам геометрическое истолкование этих образов; высказанные мною результаты вы сможете сами дополнить доказательствами; это будет легко сделать, если только вы будете всегда исходить из надлежащим образом выбранного положения системы координат.

К 1). Геометрический смысл определенной здесь так называемой «суммы двух векторов» общеизвестен; помещая начала обоих векторов в одну точку[53]), получим эту сумму в виде *диагонали построенного на них параллелограмма*, направленной из этой точки (*правило параллелограмма сил*, рис. 43).

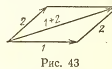


Рис. 43

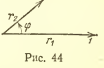


Рис. 44

К 2). Если взятые векторы имеют длины r_1 и r_2, а их направления образуют угол φ (рис. 44), то приведенная *билинейная комбинация равна* $r_1 r_2 \cos\varphi$.

К 3). Снова рассматриваем параллелограмм, стороны которого параллельны векторам *1* и *2* (рис. 45), обходимый так, как указывает последовательность направлений векторов *1* и *2*; получаем вполне определенный свободный плоскостной элемент, который как раз совпадает с элементом, определенным выше его тремя координатами.

Между прочим, *модуль* его площади равен

$$r_1 r_2 |\sin\varphi|.$$

К 4). Если приложить все три вектора к одной точке, то они образуют *три ребра некоторого параллелепипеда* (рис. 46); его объем — с надлежаще опре-

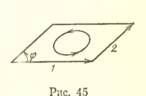


Рис. 45

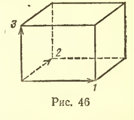


Рис. 46

деленным знаком — оказывается равным скаляру второго рода, определяемому нашим детерминантом.

В каком же виде фигурируют эти процессы в литературе, где главным моментом не является, как это было у нас, исследование поведения известных аналитических выражений при преобразованиях коорди-

нат, т. е. рациональная и простая теория инвариантов? Там, в механике и физике, выработали, следуя Грассману и Гамильтону, особую терминологию и говорят о так называемых *векторной алгебре* и *векторном анализе*, в которых образование новых векторов и скаляров из заданных векторов сравнивают с элементарными арифметическими операциями над обыкновенными числами [54]).

Прежде всего, действие, введенное в п. 1), называют (как я уже отметил) просто *сложением двух векторов 1 и 2*. Оправдание такого названия находят в том, что здесь имеют силу определенные формальные законы, характеризующие сложение обыкновенных чисел, в частности *законы коммутативный и ассоциативный*. Первый из них утверждает, что определение «суммы» не зависит от последовательности, в которой берут оба вектора *1*, *2*, второй — что прибавление суммы векторов *1* и *2* к вектору *3* дает тот же результат, что и прибавление вектора *1* к сумме векторов *2* и *3*.

Гораздо меньше оснований было назвать операции, определенные в пп. 2) и 3), *умножением*, а именно, их различают как *внутреннее* или *скалярное* (п. 2)) и как *внешнее* или *векторное* (п. 3)) *умножение*. Здесь оказывается верным то важное свойство, которое называют *дистрибутивностью умножения относительно сложения* и которое заключается в равенстве $a_1(a_2+a_3)=a_1a_2+a_1a_3$; в самом деле, для внутреннего умножения имеем

$$X_1(X_2+X_3)+Y_1(Y_2+Y_3)+Z_1(Z_2+Z_3)=$$
$$=(X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2)+(X_1X_3+Y_1Y_3+Z_1Z_3)$$

так же просто выводится аналогичное свойство для внешнего умножения. Что же касается других формальных законов умножения — я ими подробно занимался в моем последнем курсе*), — то упомяну еще только, что для внутреннего умножения имеет место и коммутативный закон ($a\cdot b=b\cdot a$); для внешнего же он несправедлив, ибо миноры матрицы, определяющей внешнее произведение, изменяют знак при перестановке векторов *1* и *2*.

*) См. т. 1, с. 24, 39, 87 и др.

Я хотел бы здесь еще отметить, что часто внешнее произведение двух полярных векторов определяют просто как «вектор», не подчеркивая в достаточной степени его аксиальный характер. Конечно, на основании вышеуказанного (на с. 75) соответствия общего характера, этот свободный плоскостной элемент тотчас же можно заменить вектором, что дает такое правило:

Внешним произведением двух векторов 1 и 2 является вектор 3 длины $r_1 r_2 |\sin\varphi|$, *перпендикулярный их плоскости и направленный так, чтобы взаимная ориентация векторов 1, 2, 3 была такой же, как и ориентация положительных осей x, y и z* (рис. 47). Не следует, однако, ни в коем случае забывать, что это определение весьма существенным образом зависит от ориентации системы координат и от масштаба.

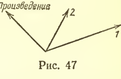


Рис. 47

О возникновении терминологии и обозначений, используемых в векторном исчислении. Я не могу вполне понять, почему эта *терминология векторного анализа* так укоренилась; возможно, это связано с тем, что многим людям доставляют большое удовольствие формальные аналогии с обычными исстари употребляемыми арифметическими действиями. Во всяком случае эти названия для операций над векторами являются в достаточной степени общепринятыми, но что вызвало широкое расхождение во мнениях — так это установление определенной символической записи для этих операций, в особенности для различных видов умножения. В предшествующем курсе*) я уже рассказал вам, как далеки еще мы здесь от соглашения, несмотря на все старания.

Я предпочитаю совсем не говорить здесь о системах обозначений векторного анализа — иначе я рискую невзначай создать еще одну новую систему!

Между прочим, на конгрессе математиков в Риме (1908) избрали даже интернациональную комиссию, которая должна была предложить единую систему обозначений; однако неимоверно трудно внести

*) См. т. 1, с. 98.

единообразие среди большого количества людей, из которых ни один не хочет расстаться со своими привычками, если только их не принуждают к этому сила закона или материальные интересы.

Созданная комиссия по унификации векторных обозначений не имела, как и следовало ожидать, ни малейшего успеха. На следующем интернациональном конгрессе в Кембридже (1912) она вынуждена была объявить, что не успела закончить своих работ, и просить о продлении ее мандата до следующего конгресса, который должен был собраться в 1916 г. в Стокгольме, но не состоялся из-за войны. Такая же судьба, по-видимому, постигнет и «Комиссию единиц и величин, входящих в формулы» (сокращенно AEF). Последняя опубликовала в 1921 г. проект обозначения векторных величин и вызвала этим тотчас же самые резкие возражения с различных сторон.

Общеупотребительная теперь терминология векторного исчисления исторически возникла главным образом из двух источников: из гамильтонова исчисления кватернионов и из грассманова учения о протяжении. Трудно читаемые исследования Грассмана оставались, как было уже упомянуто, неизвестными немецким физикам; они долгое время составляли как бы тайное учение узких математических кругов. Напротив, гамильтоновы идеи проникли в английскую физику, прежде всего, благодаря Максвеллу. Но все же в своем «Трактате по электричеству и магнетизму» *) Максвелл почти всюду пишет векторные уравнения при помощи компонент. Из боязни быть непонятым, он очень мало пользуется особым способом обозначения, хотя, по его мнению, для многих целей в физических рассуждениях является желательным избегать введения координат и с самого начала сосредоточить внимание на самой точке пространства вместо трех ее координат, а также на направлении и величине силы вместо ее трех компонент.

То, что теперь называют векторным исчислением физиков, восходит к работам английского инженера по телеграфии Хевисайда и американца Гиббса. Последний в 1901 г. выпустил свои «Элементы вектор-

*) Maxwell J. C. Treatise on Electricity and Magnetizm, v. 1—2. — Oxford, 1873.

ного анализа»*). Хотя Хевисайд, как и Гиббс, принадлежит к школе Гамильтона, однако оба они включают в свое исчисление идеи Грассмана. И вот по такому-то окольному пути, через работы этих авторов, в немецкую физику проникает векторное исчисление, а с ним грассманово учение о протяжении и гамильтоново исчисление кватернионов.

У Грассмана и у Гамильтона можно констатировать то общее, что оба они ставят своей целью оперировать с самими направленными величинами и только впоследствии переходить к компонентам. Замечательно, что оба они обобщили значение слова «произведение». Возможно, это связано с тем, что свои теории они заранее связывают с учением о комплексных (гиперкомплексных) числах (ср. наше изложение теории кватернионов в томе 1, с. 88—111). Но во всем остальном, как уже было указано, технические выражения у того и другого совершенно различны. Грассману принадлежат названия «линейный элемент», «плоскостной элемент», «внутреннее произведение» и «внешнее произведение», тогда как Гамильтон ввел термины «скаляр», «вектор», «скалярное произведение» и «векторное произведение».

В связи с тем, что ортодоксальные во всем прочем последователи Грассмана заменили очень целесообразные обозначения учителя отчасти другими, а физики смешали воедино, либо модифицировали имеющиеся терминологии, а также проявили крайне большой произвол по отношению к знакам отдельных операций, получается, наконец, даже для специалиста большая неразбериха в этой математически совершенно простой области. В этой путанице надежной путеводной звездой является принцип, высказанный на с. 43—44. Следуя ему, можно так охарактеризовать теории Гамильтона и Грассмана: тогда как Грассман в своем «учении о линейном протяжении» занимается теорией инвариантов, которые принадлежат к группе «аффинных»**) преобразований, не меняющих положения начала координат, тот же

*) Gibbs J. W. Elements of Vector-Analysis/Ed. E. B. Wilson. — N. Y., 1901.

**) В настоящей книге об этих преобразованиях речь будет впереди (ср. с. 108—133).

Грассман в своем «полном учении о протяжении» и Гамильтон в своем «исчислении кватернионов» кладут в основу своих исследований группу поворотов. При этом Гамильтон поступает совершенно наивным образом: он не знает того, что выбор ортогональной группы допускает известный произвол. Наряду с этим могут возникнуть, как уже было объяснено, новые различия в связи с тем, что мы один раз допускаем, а в другой отбрасываем как нечто излишнее зеркальное отражение (относительно начала) всех координатных осей.

Можно лучше всего уяснить себе все положение дел на примере понятий «внешнее произведение» (свободный плоскостной элемент), «векторное произведение» и «вектор». Тот, кто избирает группу ортогональных преобразований, исключая при этом симметрию, тот не делает никакой разницы между этими тремя величинами. Поэтому Грассман в своем «полном учении о протяжении» изображает свободный плоскостной элемент (параллелограмм, снабженный определенным обходом) посредством вектора, который он называет «дополнением» этого плоскостного элемента и который вполне соответствует вектору, называемому физиками векторным произведением. Если же допущена симметрия, то «плоскостной элемент» и «векторное произведение» следует считать геометрическими величинами одного рода, отличными, однако, от «вектора». Это соответствует обычному в физике разделению векторов на полярные и аксиальные. Переходя же к группе аффинных преобразований, уже нельзя считать грассманов свободный плоскостной элемент и векторное произведение геометрическими величинами одного и того же рода [55]).

Прежде чем закончить этот экскурс, я хотел бы особенно подчеркнуть. что для нашей общей точки зрения *вопросы обыкновенного векторного анализа представляют собою лишь часть обширного множества общих проблем.* Например, *скользящие векторы, связанные плоскостные элементы, винты* и *динамы* в векторном анализе на первых порах совсем не принимаются во внимание. А между тем уже для действительного понимания операций самой векторной алгебры необходимо смотреть на них как на части более обширного целого; только при таком условии

ясно выступает лежащий в их основании принцип определения геометрических величин по их поведению при различных видах ортогональных преобразований координат.

V. ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ОБРАЗОВ

Фигуры, порождаемые точками (линии, поверхности, точечные множества). Этим закончено все то, что я хотел здесь сказать об элементарных образах геометрии, и мне осталось только рассмотреть *образы высшего порядка, которые могут быть из них составлены.* Я сделаю это в исторической форме, для того чтобы вы получили определенную картину развития геометрии в различные века.

А. До *конца* XVIII *столетия* в качестве *элементарных образов* употребляли *по существу только точки*; иного рода образы, правда, встречались при случае, но никогда это не происходило систематически. В качестве производных образований точек рассматривали *кривые* и *поверхности*, а также более общие конфигурации, составленные из частей различных кривых и поверхностей. Задумаемся на минуту над тем, до чего многообразна относящаяся сюда область.

1) В *элементарном преподавании*, а иногда и в начальном курсе лекций по аналитической геометрии, все выглядит так, как если бы вся геометрия ограничивалась *прямою* и *плоскостью*, *коническими сечениями* и *поверхностями второго порядка*. Конечно, это — крайне узкая точка зрения, тем более, что уже знания древних греков простирались отчасти дальше — на некоторые высшие кривые, которые они рассматривали как «геометрические места»; однако эти вещи тогда еще не проникли в регулярное преподавание.

2) Сравним с этим уровень знаний *около* 1650 г., вслед за тем, как Ферма и Декарт создали аналитическую геометрию. Тогда различали *геометрические* и *механические кривые*; первыми были, прежде всего, конические сечения, но также и отдельные высшие кривые из числа тех, которые теперь называют *алгебраическими кривыми*; вторым названием обозначили кривые, которые можно было определить при помощи какого-нибудь *механизма*; сюда относятся,

например, *циклоиды*, образуемые при качении колеса; по большей части они принадлежат к *трансцендентным кривым*.

3) Кривые того и другого рода принадлежат к числу *аналитических кривых*, понятие которых было установлено позже; это — кривые, *координаты* x, y которых могут быть представлены как *аналитические функции некоторого параметра* t, короче говоря, — как степенные ряды относительно t.

4) В последнее время много занимались *неаналитическими кривыми*, координаты $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ которых уже не разлагаются в степенной ряд, будучи, например, непрерывными функциями без производных: этим устанавливается более *общее понятие кривой, по отношению к которому вышеназванные аналитические кривые являются лишь особенно простым частным случаем*.

5) Наконец, в самое последнее время благодаря развитию теории множеств, о которой мы уже говорили *), присоединился еще один, ранее совсем не известный объект, а именно — *бесконечные точечные множества*. Это — *совокупности бесконечного количества точек*, скопления точек, которые хотя и не образуют непрерывную кривую, но определяются вполне определенным законом [56]). Если кому-нибудь желательно найти в наших конкретных наглядных представлениях нечто приблизительно соответствующее этим точечным множествам, тот пусть, например, представит себе на звездном небе млечный путь, в котором чем точнее его рассматривают, тем больше находят звезд.

Для дисциплин, намеченных в этом кратком перечне, в частности, для инфинитезимальной геометрии (геометрии бесконечно малых, или дифференциальной геометрии) и для *теории точечных множеств* в рамках этого курса, к сожалению, не останется места, хотя они, конечно, также являются важными областями геометрии. Впрочем, их часто излагают подробно в особых курсах лекций и книгах, так что здесь мы можем ограничиться этим указанием на занимаемое ими место среди прочих геометриче-

---

*) Ср. т. 1, с. 355—381.

ских дисциплин с тем, чтобы заняться более детально вещами, которые реже излагаются в других местах.

О различии между аналитической и синтетической геометрией. Но сперва я хотел бы в связи с этим перечислением остановиться на *различии между аналитической и синтетической геометрией*, связанном с рассмотренными областями.

По своему первоначальному значению *синтез* и *анализ* являются различными способами рассуждения и изложения: *синтез* начинает с частностей и составляет из них все более и более общие и, наконец, самые общие понятия; анализ же, напротив, кладет в основу самое общее и расчленяет его на все более и более мелкие отдельные частные случаи. Таков именно смысл различия, выражаемого, например, названиями «синтетическая» и «аналитическая» химия. В школьной геометрии также говорят соответственно этому об *анализе геометрических построений*: принимают, что, скажем, искомый треугольник найден, и расчленяют поставленную задачу на отдельные частные задачи[57]). Но в математике эти слова удивительным образом приобрели совершенно иной смысл: *здесь синтетической называют ту геометрию, которая изучает фигуры как таковые без помощи формул, тогда как аналитическая геометрия последовательно пользуется формулами, устанавливаемыми после введения подходящей системы координат.* Конечно, при правильном понимании между обоими этими разделами геометрии можно усмотреть только *количественную градацию*, зависящую от того, выдвигаются ли на первый план в большей степени *формулы* или *фигуры*. Ту аналитическую геометрию, которая совершенно абстрагируется от геометрических представлений, вряд ли еще можно назвать геометрией; с другой стороны, синтетическая геометрия не может далеко уйти, если она не привлекает для точного выражения своих результатов целесообразного языка формул. Следуя такому пониманию, мы и поступали до сих пор, с самого начала применяя формулы, а затем уже задавая себе вопрос об их геометрическом значении.

Но в математике, как и всюду, люди склонны к образованию течений; таким образом и возникли *школы чистых синтетиков и чистых аналитиков*, которые

больше всего ценили абсолютную «чистоту метода» и, следовательно, были более односторонними, чем того требует природа вещей. В результате геометры-аналитики часто тонули в слепых вычислениях, не связанных ни с какими геометрическими представлениями, тогда как синтетики все спасение видели в искусственном избегании каких бы то ни было формул и при этом кончали тем, что развивали свой собственный, уклоняющийся от обычного язык формул. Такие преувеличения в следовании объективным самим по себе принципам, лежащим в основе, всегда приводят в научных школах как бы к *процессу окаменения*, и тогда новый толчок науке, существенным образом ускоряющий ее развитие, чаще всего приходит извне, т. е. от «сторонних наблюдателей». Так и здесь, в геометрии, лишь специалисты по теории функций впервые выявили, например, различие между аналитическими и неаналитическими кривыми, которое никогда не отмечалось в достаточной степени ни в работах ученых представителей, ни в учебниках обеих названных школ. Точно так же только физики, как было уже упомянуто, дали ход векторному анализу, хотя его основные понятия имеются уже у Грассмана, и все же в учебниках геометрии часто еще и теперь почти не упоминается о векторах как о самостоятельных вещах [58])!

Не раз находились сторонники того, чтобы геометрию, как самостоятельный предмет преподавания, отделить от остальной математики и чтобы вообще разделить математику в деле обучения на ее отдельные дисциплины, и действительно были созданы, особенно в иностранных высших школах, отдельные профессуры по геометрии, алгебре, дифференциальному исчислению и т. д. Однако из наших последних соображений можно как раз сделать тот вывод, что установление таких тесных границ не находит себе оправдания; напротив, в каждой науке должно быть по возможности допущено живое взаимодействие между различными действующими в ней направлениями интересов так, чтобы каждое из них чувствовало себя в принципе представителем всей математики. Я подаю даже голос, следуя той же идее, также за как можно более живую связь математиков с представителями других наук [59]).

Проективная геометрия и принцип двойственности.

В. Закончим на этом наш экскурс и рассмотрим, продолжая следовать историческому развитию, *мощный импульс, полученный геометрическими исследованиями, начиная с* 1800 *г.*, когда на передний план выступила так называемая *новая геометрия*. В настоящее время мы охотнее называем ее *проективной геометрией*, так как в ней главную роль играет операция проектирования, — нам придется позже подробнее о ней говорить. Хотя и в настоящее время часто еще употребляют название «новая», но это, собственно говоря, неуместно, ибо с того времени много раз появлялись другие все более «новые» тенденции. В качестве одного из первых новаторов я должен здесь назвать Понселе, который в 1822 г. опубликовал свой «Трактат о проективных свойствах фигур» *).

В дальнейшем развитии проективной геометрии с самого начала играло роль *различие между синтетическим и аналитическим направлениями*; в качестве представителей первого направления я назову немецких исследователей Штейнера и Штаудта, в качестве представителей второго — наряду с Мёбиусом, прежде всего, Плюккера. Основные произведения этих геометров еще и теперь не утратили своего живого влияния, это — «Систематическое развитие взаимной зависимости геометрических образов» Штейнера **), «Геометрия положения» Штаудта ***), «Барицентрическое исчисление» Мёбиуса (см. сноску на с. 29) и, наконец, «Аналитико-геометрические исследования» Плюккера ****).

Чтобы отметить важнейшие руководящие идеи этой «новой» геометрии, я в первую очередь остановлюсь на следующем.

1) Главная заслуга Понселе состоит в том, что он первый высказал ту мысль, что *для точки существуют равноценные образы*, а именно на плоскости точке

*) Poncelet V. Traité des propriétés projectives des figures. — Paris, 1822.

**) Steiner J. Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrescher Gestalten voneinander. — Berlin, 1832.

***) Staudt Ch. V. Geometrie der Lage. — Nürnberg, 1847.

****) Plücker J. Analytischgeometrische Entwicklungen. — Bd. 1. — Essen, 1828. — Bd. 2. — Essen, 1831.

можно противопоставить *неограниченную прямую*, в пространстве же — *неограниченную плоскость*; иначе говоря, в большей части геометрических предложений всегда можно слово «точка» заменить словом «прямая» или соответственно «плоскость». Это — выражение *принципа двойственности*.

Понселе примыкает в развитии своих идей к *теории поляр конических сечений* (*теория взаимных поляр*). По отношению к определенному коническому сечению каждой точке p принадлежит (соответствует), как известно, некоторая прямая π в качестве ее поляры; последнюю можно определить, например, как прямую, соединяющую точки касания двух касательных к этому коническому сечению[60]), проведенных из точки p (если, как на рис. 48, p лежит вне кривой). Наоборот, каждой прямой π принадлежит некоторый полюс p, причем имеет место «закон взаимности»: поляра π' любой точки p', лежащей на прямой π, проходит через p. Из этого осуществляемого при помощи конического сечения частного случая соответствия между прямыми и точками на плоскости, а также из аналогичного соотношения между точками и плоскостями в пространстве по отношению к какой-нибудь поверхности второго порядка Понселе заключил, что все предложения *геометрии, которые относятся только к свойствам положения, к взаимной принадлежности* (или *«встрече»*) *точек, прямых и плоскостей, могут быть «дуализированы» указанным выше способом*. Знаменитый пример дает *теорема Паскаля* о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение, которая при «дуализировании» (т. е. применении принципа двойственности) переходит в *теорему Брианшона* о шестистороннике из касательных, описанном около этого же конического сечения[61]).

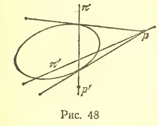


Рис. 48

2) Впоследствии очень скоро пришли к *более глубокому пониманию принципа двойственности*. Его отделили от теории поляр и стали рассматривать как *источник всего своеобразного построения проективной геометрии*. Эта прекрасная систематика впервые

появляется у Жергона и Штейнера. Рекомендую вам прочесть хотя бы в предисловии к «Систематическому развитию взаимной зависимости геометрических образов» Штейнера [62]) то место, где он в восторженных выражениях рисует картину того, как проективная геометрия впервые вносит порядок в хаос геометрических предложений и как в ней все размещается совершенно естественным образом.

На протяжении нашего курса нам еще часто придется говорить об этой систематике, но уже теперь я хотел бы дать *краткий обзор ее*. При этом принцип двойственности будет проявляться в том, что *точка и плоскость* — или соответственно (если ограничиваться плоскостью) *точка и прямая* — входят в основные понятия и предложения («аксиомы») геометрии всегда совершенно симметрично, т. е. что эти аксиомы, а значит, и логически выводимые из них предложения всегда попарно двойственны. Так называемые «метрические соотношения» элементарной геометрии (как, например, расстояние, угол и т. д.) вначале совсем не входят в эту систематику; позже мы увидим, как они могут быть дополнительно включены в нее. Более детально это построение выглядит так:

a) В основу кладутся *три рода образов* в качестве простейших: *точка*, (*неограниченная*) *прямая*, (*неограниченная*) *плоскость*.

b) Между этими основными образами имеют место следующие соотношения (называемые *аксиомами соединения*), не допускающая исключений значимость которых достигается искусным введением несобственных (бесконечно удаленных) элементов, которое впоследствии будет разъяснено более подробно: 2 *точки определяют прямую*; 3 *точки, не лежащие на одной прямой, определяют плоскость*; 2 *плоскости определяют прямую*; 3 *плоскости, не проходящие через одну прямую, определяют точку*.

c) Теперь образуем *основные линейные образы* (т. е. такие, которые аналитически определяются линейными уравнениями).

I. *Основные образы* 1-*й ступени*, каждый из которых содержит ∞^1 элементов.

α) Совокупность всех точек одной прямой: *прямолинейный ряд точек*.

β) Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну прямую: *пучок плоскостей.*

γ) Все прямые на плоскости, проходящие через одну точку: (*плоский*) *пучок прямых.*

II. *Основные образы 2-й ступени*, каждый из которых содержит ∞^2 элементов.

α) Плоскость как геометрическое место ее точек: *поле* (*плоская система*) *точек.*

α′) Плоскость как геометрическое место ее прямых: *поле* (*плоская система*) *прямых.*

β) Плоскости, проходящие через одну неподвижную точку: *связка плоскостей.*

β′) Прямые, проходящие через одну неподвижную точку: *связка прямых.*

III. *Основные образы* 3-*й ступени* из ∞^3 элементов каждый:

α) Пространство как место его точек: *пространство* (*пространственная система*) *точек.*

β) Пространство как место его плоскостей: *пространство* (*пространственная система*) *плоскостей.*

Во всем этом построении действительно всюду отчетливо выступает полная двойственность; исходя из данных таким образом оснований, можно возвести все здание проективной геометрии двумя способами, находящимися в отношении взаимности друг к другу: при одном способе берем за исходный материал точки, при другом — прямые, если речь идет о геометрии на плоскости, или плоскости, если мы занимаемся геометрией в пространстве.

Плюккеровы координаты прямой и дальнейшее развитие принципа двойственности. 3) Это построение снова можно представить в более удобном виде, если мы дальше перейдем на *путь анализа* и для этого посмотрим прежде всего, какую форму принимает *принцип двойственности* у *Плюккера.* Как известно, *уравнение прямой* на плоскости, если его свободный член не равен нулю, можно записать так:

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Эта прямая будет определена, если известны значения коэффициентов u, v, которые, между прочим, в этой записи фигурируют совершенно симметрично с текущими координатами x, y. Мысль Плюккера и состоит в том, чтобы *рассматривать* u, v как *коорди-*

наты прямой, равноправные с координатами x, y точки, и при подходящих обстоятельствах считать их переменными вместо этих последних.

При этом новом истолковании x, y имеют постоянные значения, и наше уравнение выражает условие того, что некоторая переменная прямая проходит через неподвижную точку x, y, т. е. оно является *уравнением этой точки в координатах прямой.* Наконец, можно не оказывать предпочтения ни одному из обоих образов в способе выражения и вовсе не указывать, какая именно пара величин рассматривается как постоянная и какая — как переменная; тогда наше уравнение представит собой условие *соединенного положения* (инцидентности) *точки и прямой. Принцип двойственности* как раз и опирается на то, что рассматриваемое уравнение *совершенно симметрично* относительно x, y, с одной стороны, и u, v, с другой, — и в этом свойстве заключается все то, что мы раньше понимали под «двойственностью», присущей теоремам соединения.

Естественно, что в пространстве уравнение прямой заменяется *уравнением плоскости*

$$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

В результате этих соображений можно аналитически развивать геометрию, принимая за основные переменные либо x, y, z, либо u, v, w; при этом слова «точка» и «плоскость» просто переставляются. Таким образом, возникает известное *двойственное построение геометрии*, которое во многих учебниках наглядно выражается тем, что на левой и правой половинах страницы помещаются взаимные теоремы.

Окинем теперь беглым взором возникающие таким образом *всегда взаимно двойственные высшие образы*! Это даст нам как бы продолжение предыдущей двойственной в себе схемы линейных образов.

Начинаем с того, что рассмотрим x, y, z как определенные, не сводящиеся к постоянным значениям функции φ, χ, ψ некоторого параметра t. Эти функции определяют некоторую пространственную кривую, которая в частном случае (когда функции φ, χ, ψ тождественно удовлетворяют какому-либо линейному уравнению с постоянными коэффициентами) может быть плоской кривой или, наконец (если они

удовлетворяют двум таким линейным уравнениям), вырождается в прямую. Точно так же, рассматривая u, v, w как функции t, получим *однократно бесконечную последовательность плоскостей*, которую удобнее всего представить себе при помощи *развертывающейся поверхности*, огибающей все эти плоскости.

Здесь один из частных случаев состоит в том, что все плоскости проходят через одну точку, т. е. огибаются некоторым конусом, а другой — в том, что все они проходят через одну *неподвижную прямую*.

Рассматривая же x, y, z как функции двух параметров t, t', получим некоторую *поверхность*, которая, в частности, может выродиться в *плоскость*; дуальной к этому образу является *двукратно бесконечная совокупность плоскостей, огибаемых некоторой поверхностью*; вырождением этой совокупности служит *связка плоскостей, проходящих через одну неподвижную точку*.

Выпишем все эти результаты в виде такой таблички:

$x=\varphi(t)$, $y=\chi(t)$, $z=\psi(t)$	**кривая** (*плоская кривая*) (*прямая*)	$u=\varphi(t)$, $v=\chi(t)$, $w=\psi(t)$	**развертывающаяся поверхность** (*конус*) (*прямая*)
$x=\varphi(t, t')$, $y=\chi(t, t')$, $z=\psi(t, t')$	**поверхность** (*плоскость*)	$u=\varphi(t, t')$, $v=\chi(t, t')$, $w=\psi(t, t')$	**поверхность** (*точка*)

Это может служить в качестве достаточного примера тех двойственных схем, которые охотно составлялись в продолжение долгого времени.

4) Уже у Плюккера имеется весьма существенное дальнейшее развитие всего этого подхода. По аналогии с тем, как он рассматривает три коэффициента уравнения плоскости как ее переменные координаты, он приходит к мысли рассматривать вообще *постоянные*, от которых зависит какой-нибудь геометрический образ, — например, девять коэффициентов уравнения поверхности второго порядка — как *переменные координаты* этого образа, и исследовать, что могут означать те или иные уравнения между ними. Конечно, здесь уже не может быть и речи о «двой-

ственности» в буквальном смысле; она основывалась на специфическом свойстве уравнения плоскости или соответственно прямой (с. 92) быть симметричным относительно коэффициентов и координат.

Сам Плюккер осуществил эту мысль, в частности, для случая *прямых в пространстве*. Прямая в пространстве определяется в координатах точки двумя уравнениями, которые Плюккер пишет в виде[63])

$$x = rz + \rho, \quad y = sz + \sigma.$$

Четыре постоянные r, s, ρ, σ этих уравнений можно назвать *координатами прямой в пространстве*; нетрудно установить, как они связаны с употреблявшимися раньше (с. 50) характеризующими прямую отношениями $X:Y: \ldots :N$, которые мы составляли по двум ее точкам, следуя грассманову принципу. Так вот, Плюккер прежде всего рассматривает какое-либо одно уравнение $f(r, s, \rho, \sigma) = 0$ с этими четырьмя координатами; оно выделяет из четырехкратно бесконечной (∞^4) совокупности прямых ее трехкратно бесконечную часть (∞^3), которую он называет комплексом линий; о его простейшем случае, о *линейном комплексе* у нас уже шла речь (с. 57). *Два уравнения* $f(r, s, \rho, \sigma) = 0$, $g(r, s, \rho, \sigma) = 0$ определяют *конгруэнцию линий*, которую некоторые называют также *системой* прямых; первый термин должен указывать на то, что речь идет о прямых, общих обоим комплексам $f = 0$, $g = 0$. Наконец, *три уравнения* $f = g = h = 0$ того же вида определяют однократно бесконечную совокупность (∞^1) прямых, покрывающих некоторую поверхность, т. е. некоторую *линейчатую поверхность*.

Изложение всего этого Плюккер дал в своем произведении «Новая геометрия пространства, основанная на рассмотрении прямой линии как элемента пространства» *); он умер, когда было почти закончено печатание первой части этого произведения, и я, как его тогдашний ассистент, должен был «заслужить шпоры» изданием второй части.

Общий плюккеров принцип применять любые образы как элементы пространства, а определяющие

*) Plücker J. Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. — Abt. 1. — Leipzig, 1868. — Abt. 2. — Leipzig, 1869.

их постоянные как координаты давал и в дальнейшем повод к интересным исследованиям. Так, выдающийся норвежский математик Софус Ли, который долгое время работал в Лейпциге, достиг больших успехов со своей *геометрией сфер*. В ней за элемент пространства берется сфера, которая, как и прямая, зависит от четырех параметров.

Далее, я упомяну еще исследование Штуди «Геометрия динам» *), которое относится к более позднему времени. В нем Штуди связывает со знакомым уже нам понятием *динамы* целый ряд интересных относящихся сюда изысканий.

Грассманово «учение о протяженности»; многомерная геометрия.

С. За пределы этой «новой геометрии», в которой все же основную роль играют неограниченная прямая и неограниченная плоскость как элементы пространства, выходит начатое в 1844 г. Грассманом развитие идей, ставящее на первое место *ограниченные линейный, плоскостной* и *пространственный элементы* и приписывающее им компоненты, следуя *принципу определителей*; об этом мы уже говорили подробно. Эти идеи прекрасны тем, что здесь мы идем навстречу потребностям механики и физики несравненно более плодотворным образом, чем это достигается, например, геометрией прямой или принципом двойственности.

Конечно, все эти направления ни в коем случае не являются столь резко обособленными, как это я здесь изобразил ради лучшего обзора. На самом деле все сводится только к тому, что Плюккер больше веса придавал понятию неограниченной прямой, а Грассман — понятию линейного элемента, хотя у каждого из них при случае встречается и другой образ. В частности, имя Штуди могло бы собственно быть упомянуто и в этом, и в предыдущем разделе.

Но я хочу еще подчеркнуть, что Грассман ни в коем случае не ограничивался непосредственно применимыми вещами; напротив, в своем свободном творчестве он выходил далеко за их пределы. Наиболее важным представляется то, что он ввел в рассуждения неопределенное число *n координат точки*

*) Study E. Geometrie der Dynamen.— Leipzig, 1903.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ вместо трех координат x, y, z и таким образом пришел *к геометрии «n-мерного» пространства* R_n (или *пространства n измерений*), настоящим творцом которого является именно он. Следуя своему всеобщему принципу, он рассматривает в таком высшем пространстве матрицы из координат $2, 3, \ldots, n+1$ точек, миноры которых дают ему целый ряд основных образов в пространстве R_n, аналогичных линейному и плоскостному элементам. Я уже упоминал, что получаемую таким образом абстрактную дисциплину Грассман назвал *учением о протяжении.*

Эта идея пространства n измерений R_n получила в последнее время дальнейшее развитие в том отношении, что стали рассматривать *бесконечное количество координат* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ in infinitum («в бесконечность» или «до бесконечности») и соответственно этому говорить о *бесконечномерном пространстве* R_∞. С тем, что такие рассуждения не лишены смысла, вы согласитесь, если вспомните, например, об операциях со степенными рядами: степенной ряд задается совокупностью всех своих бесконечно многих коэффициентов и может быть в силу этого изображен (истолкован) в виде точки в R_∞.

При этом замечательным и признаваемым теперь всеми математиками является то, что такой геометрический язык в случае n и даже бесконечно большого числа переменных доставляет действительную пользу; благодаря ему все рассуждения становятся гораздо живее, чем если держаться одних только аналитических выражений, и вскоре достигается такая ловкость в употреблении новых геометрических представлений, как если бы мы в R_n и в R_∞ находились у себя дома. Вопрос о том, что именно в действительности скрывается за этим явлением и не сказывается ли здесь некоторое естественное предрасположение человека, которое только из-за ограниченности нашего опыта обыкновенно развивается лишь в двух и трех измерениях, пусть решают психологи и философы!

Но если я должен здесь также ориентировать вас относительно роли математики в общей культуре, то следует еще в нескольких словах затронуть тот оборот, который придал идее многомерной геометрии

в 1873 г. лейпцигский астроном Цёльнер. Здесь перед нами один из редких случаев проникновения математической терминологии во всеобщее сознание, — ведь теперь каждый человек употребляет обороты речи, содержащие «четвертое измерение». *Эта популяризация «четвертого измерения»* началась с тех опытов, которые спирит Слейт проделал перед Цёльнером. Слейт выдавал себя за медиума, который находится в непосредственном общении с духами, и его сеансы заключались, между прочим, в том, что предметы по его желанию исчезали и вновь появлялись. Цёльнер отнесся доверчиво к этим экспериментам и создал для их объяснения такую физико-метафизическую теорию, которая получила широкое распространение. Согласно этой теории истинные физические процессы протекают в пространстве четырех или еще большего числа измерений, мы же в силу наших природных данных можем воспринимать только некоторое трехмерное его «сечение» $x_n = 0$, но особенно предрасположенный медиум, который, например, находится в общении с существами, живущими вне нашего пространства, может по произволу как удалять из него предметы — и они становятся тогда для нас невидимыми, — так и возвращать их обратно. Обыкновенно эти соотношения уясняют себе при помощи картины существ, которые связаны с какой-нибудь двумерной поверхностью и способны к восприятиям только в пределах этой последней; для примера представим себе образ жизни известного рода животных, хотя бы клещей. Если с поверхности, на которой живут эти существа, убрать какой-нибудь предмет, то для них (так себе это представляют) он будет казаться совершенно исчезнувшим; совершенно аналогично представляет себе Цёльнер эксперименты Слейта. Было составлено много подробных описаний жизни таких двумерных существ; особенно занимательно делает это анонимный автор английского произведения «Плоская страна» *).

В нем автор очень точно описывает вид двумерного мира; отдельные существа различаются по своей

*) Square. A romance of many dimensions. — London, 1884 [64]). Автор в основном преследует цель сделать постижимой возможность многомерной геометрии.

геометрической форме, которая тем сложнее, чем выше их организация. Правильные многоугольники являются высшими существами; женщины, относительно которых автор держится очень неважного мнения, имеют просто форму черты и т. д.

Конечно, мне здесь не приходится подробно распространяться о том, что математическое понимание многомерной геометрии не имеет ничего общего с метафизическими рассуждениями Цёльнера. Математика выступает здесь[65]), если употребить современный термин, в роли *чисто нормативной науки*, которая рассматривает формально возможные сочетания вещей и существует совершенно независимо от естественнонаучных или от метафизических фактов.

Скалярные и векторные поля; векторный анализ. После этого экскурса я хочу еще остановиться несколько подробнее на тех высших образах, которые можно составить в качестве *производных образований грассмановых элементарных образов* — в особенности векторов — наряду с приведенными раньше производными образованиями точек, плоскостей и т. д. Мы приходим здесь к дальнейшему *развитию векторного анализа в собственном смысле*, который благодаря Гамильтону сделался одним из ценнейших орудий механики и физики; я предлагаю вашему вниманию переведенные на немецкий язык «Элементы кватернионов» Гамильтона*), а также уже упомянутый раньше (с. 82—83) «Векторный анализ» тоже очень заслуженного американца Гиббса.

Новая мысль, присоединяющаяся здесь к известным уже нам понятиям вектора и скаляра, заключается в том, чтобы связать *эти величины с точками пространства*: каждой точке (x, y, z) пространства относят определенный скаляр

$$S = f(x, y, z)$$

и говорят тогда о *скалярном поле*; с другой стороны, в каждой точке пространства прикладывают определенный вектор

$$X = \varphi(x, y, z), \quad Y = \psi(x, y, z), \quad Z = \chi(x, y, z)$$

*) Hamilton W. R. Elemente der Quaternionen. — Bd. 1. — Leipzig, 1882. — Bd. 2. — Leipzig, 1884.

и совокупность этих векторов называют *векторным полем.*

Этим даны названия двум важнейшим геометрическим понятиям, которые в современной физике применяются на каждом шагу; достаточно будет очень немногих примеров, чтобы напомнить об их широком распространении. *Плотность распределения массы, температура, потенциальная энергия* в непрерывно протяженной системе, рассматриваемые каждая как функция места, являются примерами скалярного поля. *Поле сил*, в котором к каждой точке приложена определенная сила, является типичным примером векторного поля. Дальнейшими примерами являются в теории упругости *поле сдвигов* деформированного тела, если представить себе, что каждой точке отнесен отрезок, изображающий ее сдвиг, подобно этому в гидродинамике *поле скоростей*, наконец, в электродинамике *электрическое* и *магнитное поля*, в которых каждой точке отнесен определенный вектор *электрической* или *магнитной* напряженности поля.

В каждой точке можно из вектора магнитной напряженности поля, который по своей природе является аксиальным, и из полярного вектора электрической напряженности поля составить один винт; поэтому электромагнитное поле можно интерпретировать также как пример *винтового поля.*

Гамильтон показал, как можно проще всего сделать эти поля доступными методам дифференциального и интегрального исчислений.

В основе этого применения анализа лежат два замечания. Первое заключается в том, что дифференциалы

$$dx, \quad dy, \quad dz,$$

отношения которых определяют направление перемещения в данной точке пространства, изображают некоторый *свободный вектор*, т. е. *что они ведут себя при преобразованиях координат как компоненты свободного вектора.* Это можно легко вывести из того, что они получаются путем предельного перехода из координат маленького отрезка, проходящего через точку x, y, z.

Второе, более важное, но в то же время и более трудное для понимания замечание заключается в в том, что *символы* $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ *частного дифференцирования* также *имеют характер компонент свободного вектора*, т. е. при переходе к новой прямоугольной системе координат x', y', z' новые символы $\frac{\partial}{\partial x'}$, $\frac{\partial}{\partial y'}$, $\frac{\partial}{\partial z'}$ получаются из старых таким же образом, как преобразованные координаты вектора (а именно *полярного вектора*) получаются из его первоначальных координат.

Это сразу же станет ясным, если действительно проделать соответствующие вычисления для поворота системы координат:

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z. \end{aligned} \tag{1}$$

Эти уравнения поворота характеризуются, как мы уже подробно излагали (с. 66), тем, что их решение получается простой перестановкой строк и столбцов в системе их коэффициентов:

$$\begin{aligned} x &= a_1x' + a_2y' + a_3z', \\ y &= b_1x' + b_2y' + b_3z', \\ z &= c_1x' + c_2y' + c_3z'. \end{aligned} \tag{2}$$

Имея некоторую функцию x, y, z, можем ее представить посредством (2) также как функцию x', y', z'. По известным правилам частного дифференцирования находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x'}, \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y'}, \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial z'}. \end{aligned}$$

Входящие сюда частные производные x, y, z по x', y', z' можно сразу найти из (2), после чего

получается

$$\frac{\partial}{\partial x'} = a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y} + c_1 \frac{\partial}{\partial z},$$
$$\frac{\partial}{\partial y'} = a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} + c_2 \frac{\partial}{\partial z},$$
$$\frac{\partial}{\partial z'} = a_3 \frac{\partial}{\partial x} + b_3 \frac{\partial}{\partial y} + c_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Сравнивая этот результат с (I), замечаем действительно совпадение с формулами преобразования координат точки, а значит, и компонент вектора[66]).

Гораздо более простое вычисление показало бы точно так же, что при *параллельном переносе* системы координат три символа $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ вообще не изменяются, при симметрии же относительно точки они изменяют знак, чем и доказывается наше утверждение. Но только при этом мы не считались с изменениями масштаба, т. е. не обращали внимания на измерение; принимая же его во внимание, найдем, что наши символы имеют измерение, равное —1, ибо дифференциалы координат входят в их знаменатели.

Над этим векторным символом $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ Гамильтона мы будем производить те же операции, которые мы раньше производили над векторами. Начну с того замечания, что результат применения операции $\frac{\partial}{\partial x}$ к некоторой функции $f(x, y, z)$, т. е. $\frac{\partial f}{\partial x}$, можно рассматривать как *символическое произведение из* $\frac{\partial}{\partial x}$ *и* f, ибо формальные законы умножения (а именно они будут играть роль в дальнейшем), в частности, дистрибутивность $\left(\frac{\partial (f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)$ остаются в силе для этих операций.

Пусть теперь задано *скалярное поле* $S = f(x, y, z)$; умножаем в установленном только что смысле этот скаляр на компоненты векторного символа Гамильтона, т. е. образуем вектор

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Раньше мы видели (с. 77), что произведение скаляра на вектор является снова вектором, а так как

при доказательстве этого предложения приходится опираться только на такие свойства умножения, которые имеют место и при нашем символическом умножении, то выходит, что эти три частные производные скалярного поля определяют вектор, зависящий еще от точки x, y, z, т. е. векторное поле; оно находится со скалярным полем в определенной связи, характер которой не зависит от того или другого выбора системы координат. Этому векторному полю, взятому со знаком минус, дают название, заимствованное из метеорологии, а именно, *градиент скалярного поля.* Так, например, в известных картах погоды, помещаемых в газетах, атмосферное давление в каждом месте представлено в виде скалярного поля S, наглядно изображенного при помощи кривых $S = \text{const}$, возле которых выписаны соответствующие им значения S; тогда градиент дает направление быстрейшего падения атмосферного давления и оказывается всегда нормальным к этим «кривым (равного) уровня»[67]).

Из трех компонент X, Y, Z вектора всегда можно (ср. с. 77) составить скаляр $X^2 + Y^2 + Z^2$; в частности, из градиентов любого скаляра получаем новое скалярное поле

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,$$

которое должно быть связано некоторым, не зависящим от системы координат образом, с векторным полем этого градиента, а значит, и с первоначальным скалярным полем. Этот скаляр равен квадрату длины градиента или, как говорят, равен квадрату падения скалярного поля.

Применяя еще раз это же предложение, образуем из самого векторного символа $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ некоторый символический скаляр путем символического умножения каждой из его компонент на себя, т. е. двукратного применения обозначаемой ею операции. Это дает операцию

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

которая, следовательно, имеет скалярный характер,

т. е. остается неизменной при ортогональных преобразованиях координат.

При «умножении» этого скалярного символа на скалярное поле f обязательно должно снова получиться скалярное поле

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

которое с первоначальным полем связано не зависящим от системы координат образом. Если представить себе текущую в этом поле жидкость, плотность которой первоначально равна единице и скорость которой в каждой точке задана градиентом поля f, то за момент dt плотность возрастает в каждой точке на величину, равную произведению этого скаляра (в этой точке) на dt. Поэтому

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

называют дивергенцией (расхождением) градиента поля f.

Прежде пользовались, вслед за Ламе, такой терминологией: скалярное поле $S = f(x, y, z)$ называли функцией точки, первое связанное с ним скалярное поле $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$ — *первым дифференциальным параметром*, а второе скалярное поле $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ — *вторым дифференциальным параметром*.

Теперь мы будем подобным же образом комбинировать наш векторный символ $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ с заданным (*полярным*) *векторным полем*

$$X = \varphi(x, y, z), \quad Y = \chi(x, y, z), \quad Z = \psi(x, y, z),$$

применяя оба рода умножения двух векторов, с которыми мы раньше познакомились.

а) Путем *внутреннего умножения* возникает скаляр, который при уже знакомом нам истолковании символического умножения на $\frac{\partial}{\partial x}$ принимает такой вид:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Конечно, он в свою очередь зависит от x, y, z и представляет собой поэтому некоторое *скалярное поле*; между этим последним и данным векторным полем существует соотношение, не зависящее от системы координат. Это поле называется *дивергенцией* исходного в смысле данного выше определения.

b) *Внешнее умножение* дает матрицу

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{matrix} \right\|;$$

ее тремя определителями являются выражения

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Согласно предыдущему они определяют собой некоторый *плоскостной элемент*, или *аксиальный вектор*, или соответственно *аксиальное векторное поле*, причем характер связи обоих полей опять-таки оказывается независимым от выбора системы координат. По Максвеллу, это векторное поле имеет название curl (локон, завиток) заданного; в Германии наряду с этим словом употребляют также немецкое слово Quirl (мутовка, мешалка), происходящее от того же самого германского корня; иногда говорят также *ротор* («вращатель»); в русской литературе пользуются именно этим последним термином.

Теперь мы уже получили путем *систематического геометрического исследования* все те величины, которые физик всегда должен иметь под рукой при своих исследованиях всевозможных векторных полей. То, чем мы здесь занимались, является *чистой геометрией*. Я должен это особенно акцентировать, так как на эти вещи часто смотрят как на принадлежащие физике и соответственно этому излагают их в книгах и лекциях по физике, а не по геометрии.

Но это лишено всякого объективного основания и может быть понято лишь как дань историческому развитию, ибо в свое время физика должна была в этом случае сперва сама создать себе то орудие, в котором она нуждалась и которого не имелось тогда еще в готовом виде в арсенале математики.

Здесь мы снова встречаемся с тою же несуразностью, на которую я уже неоднократно должен был

обращать ваше внимание в прошлом семестре в области анализа. С течением времени в физике развивались всякого рода математические потребности, и это не раз сообщало крайне ценные импульсы математической науке. А между тем преподавание математики, особенно в той форме, которую оно еще до сих пор по большей части имеет в школах, не учитывает этих изменений; оно продолжает двигаться по старым, проторенным в продолжение столетий путям и предоставляет физике самой биться над налаживанием своих вспомогательных средств, хотя их математическая обработка дала бы для преподавания математики гораздо более подходящий материал, чем многие вещи, сохраняемые в нем в силу стародавних традиций. Как видите, и в духовной жизни имеет место своего рода закон инерции; все продолжает идти прямо вперед по своему старому пути, и каждому изменению, каждому переходу на новые современные пути противодействует большое сопротивление.

На этом я заканчиваю первый раздел, который познакомил нас с самыми различными видами геометрических образов, с объектами геометрии.

Теперь мы должны заняться особым методом, который имеет огромнейшее значение для более точного исследования этих образов.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Общие замечания о преобразованиях и их аналитическом изображении. Глава, которую мы теперь начинаем, является одной из важнейших в научной геометрии. Но ее основные идеи, а также простейшие ее части дают — это мне особенно желательно отметить в настоящем курсе — также очень оживляющий материал для школьного преподавания; ведь в конце концов геометрические преобразования являются не чем иным, как обобщением простого понятия функции, которое наши современные тенденции к реформе стремятся всюду поставить в центр всего преподавания математики [68].

Я начинаю с рассмотрения точечных преобразований, которые образуют простейший класс геометрических преобразований. При их применении точка остается элементом пространства, т. е. они относят каждой точке опять-таки некоторую точку — в противоположность таким преобразованиям, которые переводят точку в другие элементы пространства, как, например, в прямые, плоскости, шары и т. п. Я и здесь на первое место выдвигаю аналитическую трактовку вопроса, так как она всегда делает возможным наиболее точное выражение фактов [69].

Аналитическим изображением точечного преобразования является то, что в анализе называют введением новых переменных x', y', z', заданных как функции старых переменных x, y, z:

$$x' = \varphi(x, y, z), \quad y' = \chi(x, y, z), \quad z' = \psi(x, y, z).$$

Такую систему уравнений можно интерпретировать в геометрии двумя различными способами — я сказал бы «активно» и «пассивно». Пассивно она представляет собой изменение системы координат, т. е. (неподвижной) точке с координатами x, y, z приписываются новые координаты x', y', z'. Именно таким истолкованием мы до сих пор постоянно и

пользовались при изучении изменений прямоугольной системы координат; в случае функций φ, χ, ψ более общего вида эти формулы охватывают также переход к системам координат совершенно иной природы, например треугольным, полярным, эллиптическим и др.

В противоположность этому при активном понимании фиксируют систему координат, а преобразовывают само пространство. С каждой точкой x, y, z сопоставляют точку x', y', z' и этим действительно устанавливают некоторое преобразование точек пространства; это и является тем истолкованием, с которым мы в дальнейшем будем постоянно иметь дело.

Следуя этим разъяснениям, мы получим самые первые примеры точечных преобразований, истолковывая активно те формулы, которые раньше (с. 64—65) — при пассивном понимании — изображали параллельный перенос, поворот, зеркальное отражение, изменение масштаба прямоугольной системы координат. Можно легко убедиться в том, что первые две из упомянутых групп формул дают параллельный перенос и соответственно поворот около O всего пространства, рассматриваемого как твердое тело по отношению к неподвижной системе координат; третья группа дает центральную симметрию пространства относительно начала O (с каждой точкой x, y, z сопоставляем точку $-x$, $-y$, $-z$, симметричную с нею относительно O, рис. 49); наконец, последняя группа формул представляет собой так называемую гомотетию всего пространства [70]) с центром в точке O.

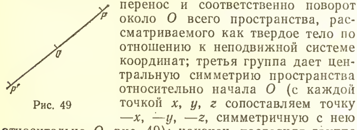


Рис. 49

Наши исследования мы начинаем с одной особенно простой группы точечных преобразований, которая охватывает все названные преобразования как частные случаи, — с группы аффинных преобразований.

I. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Аналитическое определение и основные свойства. Аффинное преобразование аналитически определяется тем, что x', y', z' являются произвольными це-

лыми линейными функциями от x, y, z:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z + d_1,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \qquad (1)$$
$$z' = a_3x + b_3y + c_3z + d_3;$$

Это название (латинское прилагательное affinis, происходящее от слов ad — «к», «у» и finis — «конец», означает «смежный») восходит к Мёбиусу и еще далее к Эйлеру. Оно должно выражать, что при таком преобразовании бесконечно удаленным точкам всегда соответствуют опять-таки бесконечно удаленные точки, т. е. что, так сказать, «концы» пространства сохраняются (переходят друг в друга); в самом деле, из написанных формул немедленно получается, что x', y', z' становятся бесконечными одновременно[71]) с x, y, z.

В противоположность этому при изучаемых в дальнейшем общих проективных преобразованиях, при которых x', y', z' являются дробно-линейными функциями x, y, z, некоторые лежащие на конечном расстоянии точки переходят в бесконечно удаленные в связи с указанным видом функций.

В физике аффинные преобразования, под названием однородных деформаций, играют очень большую роль; слово «однородный» выражает здесь (в противоположность «разнородному») независимость коэффициентов от рассматриваемого места в пространстве, слово же «деформация» напоминает о том, что при этом преобразовании, вообще говоря, изменяется форма тела.

Преобразование (1) можно, очевидно, составить из параллельных переносов пространства на d_1, d_2, d_3 параллельно трем координатным осям и из однородного линейного преобразования, уже не содержащего свободных (постоянных) членов:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2z, \qquad (2)$$
$$z' = a_3x + b_3y + c_3z;$$

это последнее преобразование оставляет неизменным положение начала (центрально аффинное преобразо-

вание) и является несколько более удобным для исследования.

1) Прежде всего рассмотрим вопрос о разрешимости системы уравнений (2). Как учит теория определителей, вопрос сводится к тому, обращается ли в нуль определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

составленный из коэффициентов этого преобразования, или нет. Случаем $\Delta = 0$ мы позже займемся особо, а пока будем считать, что $\Delta \neq 0$. При этом условии система (2) однозначно разрешима, а именно,

$$\begin{aligned} x &= a_1'x' + b_1'y' + c_1'z', \\ y &= a_2'x' + b_2'y' + c_2'z', \\ z &= a_3'x' + b_3'y' + c_3'z', \end{aligned} \tag{4}$$

причем коэффициенты $a_1', \ldots, c_3'$ оказываются равными соответствующим минорам определителя Δ, деленным на сам этот определитель. Каждой точке x', y', z' соответствует, таким образом, одна и только одна точка x, y, z, и переход от x', y', z' к x, y, z также является аффинным преобразованием.

2) Теперь можно поставить вопрос о том, как изменяются пространственные образы при этих аффинных преобразованиях. Если сначала возьмем плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то, вводя выражения (4) для x, y, z, получаем такое уравнение соответствующего образа:

$$A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0,$$

где $A', \ldots, D'$ составляются вполне определенным образом из $A, \ldots, D$ и коэффициентов преобразования[72]). При этом в силу 1) каждая точка второй плоскости получается из некоторой надлежаще выбранной точки первой плоскости. Итак, каждой плоскости соответствует опять некоторая плоскость. А поскольку всякая прямая является линией пересечения двух плоскостей, то, кроме того, каждой прямой должна обязательно соответствовать также не-

которая прямая. Преобразования, обладающие таким свойством, Мёбиус называет коллинеациями, ибо они сохраняют «коллинеарность» трех точек, т. е. их свойство лежать на одной прямой. Таким образом, всякое аффинное преобразование представляет собой обязательно некоторую коллинеацию.

Исследуя таким же образом поверхность второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \ldots = 0,$$

а именно, заменяя x, y, z их выражениями (4) через x', y', z', получим тоже некоторое уравнение второй степени, т. е. аффинное преобразование переводит каждую поверхность второго порядка снова в поверхность второго порядка и вообще каждую поверхность n-го порядка опять в некоторую поверхность n-го порядка.

Особенный интерес будут иметь для нас позже те поверхности, которые соответствуют некоторой сфере. Прежде всего, согласно предыдущему, такими поверхностями могут быть только поверхности второго порядка, ибо сфера является частным случаем поверхности этого вида; поскольку же все точки сферы расположены в конечной части пространства, т. е. ни одна из них не может после преобразования оказаться переброшенной в бесконечность, то наши поверхности обязательно должны быть поверхностями второго порядка, лежащими целиком в ограниченной части пространства, т. е. эллипсоидами.

3) Посмотрим теперь, что получается из свободного вектора с компонентами

$$X = x_1 - x_2, \quad Y = y_1 - y_2, \quad Z = z_1 - z_2.$$

Применяя к координатам точек *1* и *2* формулы преобразования (2), получаем для компонент

$$X' = x_1' - x_2', \quad Y' = y_1' - y_2', \quad Z' = z_1' - z_2'$$

соответствующего отрезка *1' 2'* формулы

$$\begin{aligned} X' &= a_1X + b_1Y + c_1Z, \\ Y' &= a_2X + b_2Y + c_2Z, \\ Z' &= a_3X + b_3Y + c_3Z. \end{aligned} \tag{5}$$

Эти новые компоненты зависят, таким образом, только от X, Y, Z, а не от отдельных значений

координат x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, т. е. совокупности всех отрезков *1 2* с одинаковыми компонентами X, Y, Z соответствует совокупность отрезков $1'$ $2'$ тоже с одинаковыми компонентами X', Y', Z', или, другими словами: каждому свободному вектору соответствует при аффинном преобразовании опять-таки некоторый свободный вектор [73]). В этом утверждении содержится существенно больше, чем в том, что каждой прямой соответствует некоторая прямая. А именно, равные и одинаково направленные отрезки на двух параллельных прямых изображают один и тот же свободный вектор, поэтому и соответствующие им отрезки должны изображать один и тот же вектор, т. е. быть параллельными, одинаково направленными и

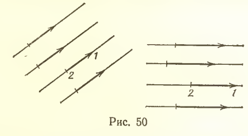


Рис. 50

равными между собой (рис. 50). Каждой системе параллельных прямых соответствуют, следовательно, опять-таки параллельные прямые, а равным отрезкам на них — также равные (между собой) отрезки. Эти свойства тем более значительны, что вообще — как нетрудно убедиться — длина отрезка и величина угла между двумя прямыми изменяются при аффинном преобразовании.

4) Рассмотрим теперь два вектора неодинаковой длины на одной и той же прямой [74]). Они, как известно, получаются один из другого умножением на некоторый скаляр; поскольку же X', Y', Z' являются, согласно формуле (5), однородными линейными функциями от X, Y, Z, то соответствующие им векторы тоже отличаются один от другого как раз только этим самым множителем, а это означает, что их длины относятся друг к другу, как длины первоначальных векторов.

Этот результат можно высказать еще и так: две прямые, переходящие одна в другую при некотором

аффинном преобразовании, находятся в отношении «подобия» друг к другу, т. е. соответственные отрезки на обеих прямых имеют одно и то же отношение.

5) Наконец, сравним еще объемы двух соответственных тетраэдров $T=(1,2,3,4)$ и $T'=(1',2',3',4')$. Имеем

$$6T' = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & z_3' & 1 \\ x_4' & y_4' & z_4' & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1 & a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1 & a_3x_1+b_3y_1+c_3z_1 & 1 \\ a_1x_2+b_1y_2+c_1z_2 & a_2x_2+b_2y_2+c_2z_2 & a_3x_2+b_3y_2+c_3z_2 & 1 \\ a_1x_3+b_1y_3+c_1z_3 & a_2x_3+b_2y_3+c_2z_3 & a_3x_3+b_3y_3+c_3z_3 & 1 \\ a_1x_4+b_1y_4+c_1z_4 & a_2x_4+b_2y_4+c_2z_4 & a_3x_4+b_3y_4+c_3z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Применяя известную теорему об умножении определителей, получаем отсюда равенство [75]

$$6T' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

в котором первый множитель есть Δ, а второй равен $6T$. Таким образом,

$$T' = \Delta T.$$

Следовательно, при аффинных преобразованиях объемы всех тетраэдров, а потому и вообще объемы всех тел (как суммы объемов тетраэдров или как пределы таких сумм) умножаются на некоторый постоянный множитель, а именно, на определитель преобразования Δ.

Применение к теории эллипсоида. Этих немногих предложений, которые мы получили из аналитического определения аффинного преобразования, достаточно для того, чтобы составить себе вполне наглядное геометрическое представление об этом преобразовании.

При этом нам удалось получить упомянутые предложения проще, чем это обычно делается, благодаря тому, что мы могли воспользоваться понятием вектора, которое в данном случае является самым подходящим вспомогательным средством.

Наиболее отчетливую геометрическую картину аффинных преобразований можно получить, если за исходный пункт взять сферу в пространстве R с координатами x, y, z. Этой сфере в пространстве R' с координатами x', y', z' будет соответствовать, как мы видели, некоторый эллипсоид [76]). Если будем рассматривать какую-нибудь систему параллельных хорд сферы, то им, согласно 3), должны соответствовать также взаимно параллельные хорды эллипсоида (рис. 51). Далее, в силу подобия соответственных рядов точек (см. 4)) серединам хорд сферы также соответствуют середины хорд эллипсоида, а так как первые лежат в одной (диаметральной) плоскости (сферы), то вторые в силу основного свойства 2) также должны лежать в одной плоскости, которую называют диаметральной плоскостью эллипсоида. Но, как известно, все диаметральные плоскости сферы проходят через ее центр M, который делит пополам каждую проходящую через него хорду (диаметр сферы); поэтому соответствующая точка M' (центр эллипсоида) принадлежит всем диаметральным плоскостям и делит пополам каждую проходящую через нее хорду (диаметр эллипсоида).

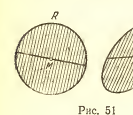


Рис. 51

Далее, важно установить, что соответствует системе трех взаимно перпендикулярных диаметральных плоскостей сферы. Последняя имеет, очевидно, то характеристическое свойство, что каждая из таких трех плоскостей делит пополам хорды, параллельные линии пересечения двух других плоскостей. Это свойство сохраняется при аффинных преобразованиях, а поэтому каждой тройке взаимно перпендикулярных диаметральных плоскостей сферы соответствует такая тройка диаметральных плоскостей эллипсоида, что хорды, параллельные линии пересечения какихлибо двух из этих плоскостей, делятся третьей плоскостью пополам. Такие три плоскости называют тройкой сопряженных диаметральных плоскостей, а их три линии пересечения — тройкой сопряженных диаметров.

Но каждый эллипсоид имеет, — конечно, здесь я могу считать это известным — три так называемые главные оси, т. е. тройку сопряженных диаметров, из которых каждый перпендикулярен двум другим. Согласно предыдущему им соответствуют в силу нашего аффинного преобразования три взаимно перпендикулярных диаметра сферы в R.

Для простоты принимаем, что центрами эллипсоида и шара являются начала координат в R' и соответственно в R, а затем надлежащим поворотом делаем обе ортогональные тройки осей осями x', y', z' в R' и соответственно осями x, y, z в R; при этом можно представлять себе по желанию, что поворачивается либо пространство, либо система координат. Во всяком случае, обе эти операции изображаются особым, подробно рассмотренным раньше типом линейных однородных подстановок координат, а поскольку последовательное применение нескольких линейных однородных подстановок всегда равносильно одному преобразованию того же типа, то и в новых координатах уравнения наших преобразований, переводящих R в R', также имеют вид (2):

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2z,$$
$$z' = a_3x + b_3y + c_3z.$$

Но при нашем выборе новых систем координат оси x соответствует ось x', т. е. при $y = z = 0$ всегда будет также $y' = z' = 0$, откуда следует, что $a_2 = a_3 = 0$; совершенно так же находим, что $b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0$.

Поэтому каждое аффинное преобразование с точностью до надлежащим образом выбранных поворотов представляет собой не что иное, как так называемое «чистое аффинное преобразование»

$$x' = \lambda x, \quad y' = \mu y, \quad z' = \nu z \qquad (\Delta \neq 0) \qquad (6)$$

или, как говорят физики, чистую однородную деформацию (по-английски pure strain). Содержание этих уравнений поддается, очевидно, простой геометрической интерпретации. А именно: пространство растягивается (или соответственно сжимается, если $|\lambda| < 1$) в направлении оси x в λ раз и, кроме того, еще зер-

кально отражается (относительно плоскости yz), если $\lambda < 0$; точно так же происходит μ-кратное и соответственно ν-кратное растяжение (сжатие) в двух других координатных направлениях. Мы можем поэтому кратко охарактеризовать чистое аффинное преобразование как равномерное растяжение (сжатие) пространства по трем взаимно перпендикулярным направлениям и получаем, таким образом, геометрическую картину, нагляднее которой едва ли можно требовать.

При введении косоугольных координат все принимает еще более простой вид. А именно, в пространстве R выбираем, не изменяя положения начала, какую-либо произвольную прямоугольную или косоугольную систему осей x, y, z и принимаем три прямые в R', аффинно соответствующие этим осям, за оси некоторой, вообще говоря, косоугольной системы координат x', y', z' в R'. А так как формулы перехода от прямоугольных к косоугольным декартовым координатам (при неподвижном начале) являются, как известно, линейными однородными уравнениями вида (2), и, с другой стороны, композиция нескольких таких подстановок приводит снова к подстановкам того же типа, то запись аффинного преобразования и при употреблении описанных только что косоугольных координат должна иметь вид (2). Но, согласно нашему выбору координатных осей, эти уравнения должны переводить три оси системы координат, введенной в R, в оси системы, введенной в R', из чего, буквально повторяя приведенные выше рассуждения, мы можем заключить, что эти уравнения действительно сводятся к полученному окончательно виду (6).

Итак, при применении (косоугольных) декартовых координат, отнесенных к двум соответственным тройкам осей, уравнения аффинного преобразования сами собой получают эту простую специальную форму (6)[77].

В связи с этими рассуждениями можно получить очень изящное решение задачи о нахождении механизма, позволяющего производить аффинные преобразования. Эту задачу я поставил в зимнем семестре 1908/09 г. во время чтения курса механики. Наилучшее решение как с точки зрения основных идей, так

и в смысле целесообразности технического устройства механизма дал Ремак. Основным кинематическим элементом, использованным Ремаком, являются так называемые «нюрнбергские ножницы»; это — цепь шарнирно связанных стержней, образующих ряд подобных друг другу параллелограммов. Вершины $S_0, S_1, S_2, \ldots$, общие каждым двум таким соседним параллелограммам, при всех деформациях этой шарнирной системы описывают на общей прямой g, содержащей эти точки, т. е. на общей диагонали всех параллелограммов, подобные ряды точек (рис. 52).

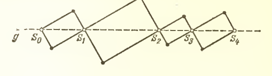


Рис. 52

Если из трех таких ножниц составить треугольник, соединяя их шарнирно в каких-нибудь вершинах S, то система точек, образованная из всех шарнирных точек S, будет преобразовываться аффинно при всяком изменении всей шарнирной системы; к этому можно непосредственно прийти, приняв диагонали двух из этих ножниц за оси косоугольной системы координат (рис. 53).

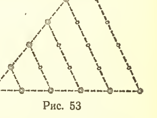


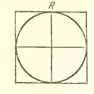
Рис. 53

Другие точки, которые одновременно подвергаются тому же аффинному преобразованию, можно получить, помещая между какими-либо двумя шарнирными точками треугольника еще одни ножницы того же рода и рассматривая их шарнирные точки (на рисунке все ножницы обозначены их диагональными прямыми). Следуя этому принципу, можно построить самые разнообразные плоские, а также и пространственные модели аффинно изменяемых систем.

Я не буду здесь заниматься дальнейшим разбором всех свойств аффинных преобразований, а покажу лучше, где эти преобразования могут найти себе применение.

Начну с примера, который покажет, каким замечательным вспомогательным средством для вывода новых геометрических теорем являются они, а именно, рассмотренное выше аффинное преобразование сферы в эллипсоид дает возможность получить из известных свойств сферы новые предложения об эллипсоиде. Например, при построении каких-нибудь трех взаимно перпендикулярных диаметров сферы и проведении через их концы шести касательных плоскостей, получается описанный около этой сферы куб с объемом $J = 8r^3$, где r — радиус шара.

Наше аффинное преобразование переводит, очевидно, каждую касательную плоскость сферы в некоторую касательную плоскость эллипсоида. Поэтому при помощи упомянутых предложений находим, что каждому такому кубу, взятому в пространстве R, соответствует в пространстве R' некоторый описанный около эллипсоида параллелепипед, грани которого касаются эллипсоида в концах трех взаимно сопряженных диаметров и параллельны соответствующим диаметральным плоскостям, а ребра соответственно параллельны этим трем диаметрам.



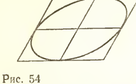


Рис. 54

(Аналогичное свойство имеем на плоскости для круга и эллипса, ср. рис. 54.) Это рассуждение можно, очевидно, сразу же обратить: каждому параллелепипеду указанного вида, описанному около эллипсоида, соответствует некоторый куб, описанный около сферы, ибо трем взаимно сопряженным диаметрам эллипсоида соответствуют три взаимно перпендикулярных диаметра сферы. Но нам известно, что при аффинном преобразовании каждый объем умножа-

ется на определитель Δ подстановки; поэтому для объема всякого параллелепипеда указанного вида, описанного около эллипсоида, имеет место формула

$$J' = J\Delta = 8r^3\Delta.$$

Она не зависит, очевидно, от того, как расположен наш параллелепипед; он имеет, таким образом, всегда один и тот же постоянный объем независимо от того, к какой тройке сопряженных диаметров он отнесен. В частности, для тройки главных осей, образующих друг с другом прямые углы, получаем прямоугольный параллелепипед, объем которого, очевидно, равен $8abc$, если $2a$, $2b$, $2c$ — длины главных осей. Этим мы определили указанный постоянный объем, после чего наша теорема гласит окончательно: все параллелепипеды, описанные около эллипсоида, грани которых параллельны трем взаимно сопряженным диаметральным плоскостям, имеют один и тот же объем $J = 8abc$, где a, b, c — длины главных полуосей.

Для доказательства приложимости этой теоремы ко всякому элипсоиду остается еще уяснить себе, что всякий эллипсоид можно получить из сферы путем некоторого аффинного преобразования. Но это сразу получается из вида (6) уравнений аффинного преобразования; из этих уравнений видно, что оси эллипсоида, полученного из сферы, относятся, как $\lambda : \mu : \nu$, причем λ, μ, ν — три произвольных числа [78]).

Ограничиваясь этим маленьким примером применений аффинных преобразований в теоретической геометрии [79]), я желаю с тем большей силой подчеркнуть, что аффинные преобразования имеют колоссальное значение также и на практике.

Обращаясь прежде всего к потребностям физиков, упомяну, что аффинные преобразования играют основную роль в теории упругости, в гидродинамике, вообще в каждой отрасли механики непрерывных сред. Конечно, мне вряд ли следует объяснять это подробнее. Кто хоть немного занимался этими дисциплинами, тот достаточно хорошо знает, что там всякий раз, когда ограничиваются изучением достаточно малых элементов пространства, приходится иметь дело с однородными линейными деформациями.

Параллельное проектирование одной плоскости на другую. Зато я остановлюсь здесь более подробно на вопросе о применении к правильному изготовлению чертежей, необходимому как для физиков, так и для математиков. Действительно, коль скоро речь идет о параллельном проектировании, то в основе всегда лежат только аффинные преобразования пространства. К сожалению, в этой области правильного изображения пространственных фигур на плоском чертеже поразительно много грешат; как в математических книгах при изображении пространственных конфигураций, так и в книгах по физике при изображении аппаратов вы можете найти совершенно невероятные ошибки. Особенно часто бывает — я привожу только один пример, — что при изображении шара экватор чертят в форме двуугольника из дуг круга (рис. 55, слева). Это, конечно, является полным извращением действительности, ибо на самом деле, как мы сейчас увидим, экватор всегда следует изображать в виде эллипса.

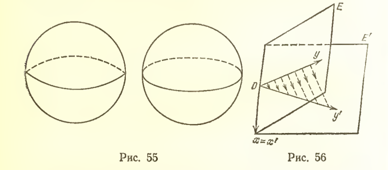


Рис. 55 Рис. 56

Принцип геометрически правильного изображения заключается в том, что фигуру, которую следует изобразить, проектируют на плоскость чертежа прямолинейными лучами, исходящими из одной точки. Наиболее простые соотношения получаются в том случае, когда представляют себе этот центр проектирования удаленным в бесконечность, т. е. когда изображение выполняют при помощи параллельной связки лучей; это и является тем случаем, который нас здесь интересует. Впрочем, эти разъяснения относятся к области начертательной геометрии. Я ни

в коем случае не думаю систематически здесь ее излагать, а хочу только показать вам, какое место она занимает в общем здании всей геометрии. Поэтому я также не всегда буду иметь возможность входить в подробности доказательств.

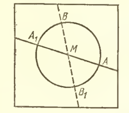
Начнем с исследования изображения плоской фигуры, т. е. с проекции одной какой-нибудь плоскости E на другую плоскость E' при помощи параллельной связки лучей [80]). Для этого начало координат O помещаем на линии пересечения плоскостей E и E' (рис. 56) и направляем вдоль нее ось x; ось y проводим произвольно на плоскости E через O, например перпендикулярно к оси x, и определяем ось y' как проекцию оси y на плоскость E' при проектировании с помощью рассматриваемой связки параллельных лучей, так что на плоскости E' получаем некоторую, вообще говоря, косоугольную систему координат. Тогда координаты двух соответственных точек на плоскостях E и E' оказываются связанными такими соотношениями:

$$x' = x, \quad y' = \mu y,$$

где μ — некоторая константа, зависящая от заданного положения плоскостей и связки параллельных прямых [81]); таким образом, мы действительно имеем здесь дело с аффинным преобразованием. Доказательство этих формул является настолько простым, что мне вряд ли приходится на нем задерживаться. Отметим, что эти уравнения имеют по сравнению с общей формулой (6) уравнений аффинного преобразования то упрощение, что здесь $\lambda = 1$, так что $x' = x$. Причина этого, конечно, заключается в том, что ось x является линией пересечения оригинальной и картинной плоскостей, так что на ней каждая точка совпадает со своим изображением. Можно сразу получить все существенные свойства нашего отображения, специализируя для случая плоскости все теоремы, выведенные раньше для пространства; так, например, каждой окружности на E соответствует эллипс на E' и т. д.

Теперь представляется вполне естественным задать обратный вопрос: можно ли любые две плоскости E, E', связанные заданным аффинным соответствием, так расположить друг относительно друга,

чтобы одна из них получалась из другой посредством некоторого параллельного проектирования. Для решения этого вопроса будем исходить из произвольной окружности на плоскости E и соответствующего ей эллипса на плоскости E' (вместо этого мы могли бы также воспользоваться какими-нибудь двумя соответственными эллипсами). Центру M окружности соответствует центр M' эллипса (рис. 57).



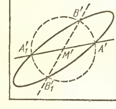


Рис. 57

Перенесем теперь эту окружность из плоскости E в плоскость E', совмещая ее центр с точкой M'; тогда она либо пересечет эллипс в четырех точках, либо не будет иметь с ним ни одной общей точки. Промежуточный случай касания мы ради простоты оставляем здесь без рассмотрения.

В первом случае, показанном на рисунке, рассматриваем оба диаметра эллипса $A'A'_1$ и $B'B'_1$, которые проходят через упомянутые четыре точки пересечения, лежащие на плоскости E'; им соответствуют в силу нашего аффинного преобразования два диаметра AA_1 и BB_1 окружности на плоскости E, которым они *равны* по построению. Поэтому, вообще, соответственные отрезки, лежащие на прямых AA и $A'A'_1$, а также на прямых BB_1 и $B'B'_1$, оказываются равными согласно общему свойству аффинных отображений (см. 4) на с. 112).

Совмещая теперь плоскость E с E' так, чтобы точка M совпала с M' и чтобы совпали прямые одной из названных пар, например, чтобы AA_1 совпала с $A'A'_1$, а затем выводя плоскость E за пределы E' в пространство поворотом вокруг этой прямой как вокруг оси, получаем некоторое аффинное отображение одной плоскости на другую, при котором каж-

дая точка линии пересечения соответствует себе самой. Тогда легко можно показать — я опять-таки не останавливаюсь на подробностях доказательства, — что все прямые, попарно соединяющие соответственные точки плоскостей, параллельны между собой [82], каков бы ни был угол, образованный этими плоскостями, т. е. что аффинное отображение плоскостей действительно может быть произведено параллельным проектированием.

Если же наш круг не пересекает эллипса, т. е. если его радиус меньше малой или больше большой полуоси эллипса, то оба общих диаметра становятся — на языке анализа — мнимыми, для чертежника же они вообще не существуют, и все описанное выше построение оказывается невозможным. Тогда, если все же желательно установить это соответствие при помощи некоторого параллельного проектирования, не остается ничего другого, как прибегнуть к гомотетии и увеличивать или уменьшать наш круг до тех пор, пока не получится предыдущий случай; гомотетию (и вообще преобразования подобия) и без того всегда употребляют при копировании изображений (картин) как «перечерчивание картины в другом масштабе». В результате получаем такую основную теорему: каждое аффинное соответствие можно установить, и притом бесчисленным числом различных способов, комбинируя некоторое преобразование подобия с некоторым параллельным проектированием [83].

Аксонометрия (аффинное отображение пространства с нулевым определителем). Гораздо более интересной и важной, чем это отображение одной плоскости на другую, представляется проблема отображения всего пространства на плоскость посредством параллельного проектирования — проблема, к которой мы теперь переходим; при этом во избежание многословий условимся заранее всегда допускать увеличение или уменьшение изображения при помощи преобразования подобия. Таким образом, возникает тот способ изображения, который в начертательной геометрии называют аксонометрией; на практике ему принадлежит чрезвычайно важная роль. Каждая фотография приближенно представляет собой аксонометрическое отображение, если только

изображенный предмет был достаточно удален от аппарата (строго говоря, фотография является центральной проекцией); точная же аксонометрия применяется прежде всего в тех случаях, когда хотят изобразить пространственные геометрические фигуры, физические аппараты, архитектурные детали и тому подобное.

Разрешите мне теперь сразу же высказать то предложение, которое связывает эту аксонометрию с нашими предыдущими рассуждениями об аффинных преобразованиях: отображение пространства на плоскость посредством параллельного проектирования и преобразования подобия (аксонометрия) аналитически изображается посредством аффинного преобразования с равным нулю определителем [84]):

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z, \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Это как раз тот исключительный случай, рассмотрение которого мы в свое время отложили на будущее. Вы видите, насколько важны эти «вырождающиеся» преобразования, хотя их, к сожалению, очень часто и совершенно несправедливо оставляют без внимания. Далее, оказывается справедливым также и следующее обратное предложение: каждая такая подстановка с определителем $\Delta = 0$ дает некоторое аксонометрическое отображение. При этом необходимо, чтобы не все коэффициенты этой подстановки и даже не все составленные из них миноры второго порядка были равны нулю, ибо в противном случае получились бы дальнейшие вырождения, которые я могу здесь пропустить, поскольку они легко могут быть исследованы по указанному ниже образцу.

Для доказательства нашего утверждения убедимся прежде всего в том, что все точки x', y', z', получаемые из (1) (для произвольных x, y, z), действительно лежат в одной плоскости, т. е. в том, что существуют такие три числа k_1, k_2, k_3, для которых выполняется тождественно относительно x, y, z равенство

$$k_1x' + k_2y' + k_3z' = 0. \qquad (2)$$

В самом деле, это тождество эквивалентно в силу (1) такой системе трех линейных однородных уравнений:

$$k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 = 0,$$
$$k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3 = 0, \qquad (2')$$
$$k_1c_1 + k_2c_2 + k_3c_3 = 0,$$

а эти последние, как известно, определяют отношения $k_1 : k_2 : k_3$ однозначным образом как раз в том случае, когда обращается в нуль определитель Δ из коэффициентов, но без обращения в нуль всех его девяти миноров второго порядка. Поэтому все точки изображения x', y', z' действительно лежат в одной плоскости (2), определяемой уравнениями (2′).

Выберем теперь в пространстве R' такую новую прямоугольную систему координат, чтобы плоскость (2) превратилась в плоскость $x'y'$ $(z' = 0)$. Тогда каждой точке пространства R должна соответствовать некоторая точка в плоскости $z' = 0$, и уравнения нашего аффинного преобразования необходимо должны иметь в новых координатах такой вид:

$$x' = A_1x + B_1y + C_1z,$$
$$y' = A_2x + B_2y + C_2z, \qquad (3)$$
$$z' = 0.$$

При этом шесть постоянных $A_1, \ldots, C_2$ ничем уже не регламентированы, ибо ввиду специальной формы записи последней строки определитель нашей подстановки всегда равен нулю; не должны только одновременно обращаться в нуль все три минора второго порядка (т. е. не должно быть $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$), так как в противном случае имело бы место дальнейшее вырождение, которое мы исключили из рассмотрения с самого начала [85]).

Доказательство того, что определенные таким образом аналитические отображения пространства R на плоскость E' (в данном случае на плоскость $x'y'$) действительно совпадают геометрически с определенными выше аксонометрическими проекциями, я разобью на несколько отдельных шагов, выводя одновременно главные свойства этого отображения (3), подобно тому, как я поступал ранее (с. 108—113),

изучая аффинные преобразования с отличным от нуля определителем.

1. Прежде всего, ясно, что каждой точке x, y, z из R однозначно соответствует некоторая точка x', y' на E'. Наоборот, если задать какую-нибудь точку x', y' на E', то уравнения (3) будут выражать, что соответствующая точка x, y, z из R лежит на двух определенных плоскостях, коэффициенты которых, согласно нашему предположению, не пропорциональны и которые поэтому имеют собственную (т. е. не бесконечно удаленную) линию пересечения; все точки этой прямой должны в нашем преобразовании соответствовать заданной точке x', y'. При изменении точки x', y' каждая из этих двух плоскостей перемещается параллельно самой себе, ибо коэффициенты A_1, B_1, C_1 и соответственно A_2, B_2, C_2 остаются неизменными. Следовательно, линия пересечения также остается параллельной самой себе, и мы приходим к тому результату, что каждой точке плоскости E' соответствуют все точки одной из прямых, составляющих совокупность параллельных прямых в R. Этим уже намечена связь нашего отображения с параллельным проектированием пространства.

2. Точно так же, как и в п. 3) (с. 111), относящемуся к случаю общего аффинного преобразования, найдем теперь формулы для компонент X', Y' отрезка на плоскости E', соответствующего свободному вектору X, Y, Z из R:

$$\begin{aligned} X' &= A_1X + B_1Y + C_1Z, \\ Y' &= A_2X + B_2Y + C_2Z, \\ Z' &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Это опять означает, что каждому свободному вектору из R соответствует некоторый свободный вектор X', Y' на картинной плоскости или, точнее: если в пространстве R перемещать некоторый отрезок параллельно ему самому, сохраняя его величину и направление, то соответствующий ему отрезок на плоскости E' также будет перемещаться параллельно самому себе, сохраняя свою величину и направление.

3. В частности, рассмотрим единичный вектор $X = 1$, $Y = Z = 0$ на оси x, идущий от точки $(0, 0, 0)$ к точке $(1, 0, 0)$. Ему, согласно (4), соответствует

на E' вектор

$$X' = A_1, \quad Y' = A_2,$$

идущий от начала O' к точке с координатами A_1, A_2. Подобно этому, единичным векторам на осях y и z сответствуют два вектора, идущие от O' к точкам с координатами B_1, B_2 и соответственно C_1, C_2. Эти три вектора на плоскости E' — обозначим их кратко через (A), (B), (C) (рис. 58) — могут быть выбраны совершенно произвольно, ибо координатами своих концов они как раз и определяют упомянутые выше шесть произвольных параметров аффинного преобразования (3), так что этими векторами вполне определяется наше отображение; нужно только, чтобы все

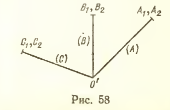


Рис. 58

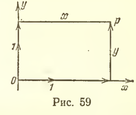


Рис. 59

эти три вектора не попали на одну и ту же прямую, причем мы ради простоты предположим, что также никакие два из них не лежат на одной прямой. Три единичных вектора, лежащие на координатных осях пространства R, имеют своими изображениями на E' — таков наш результат — три произвольных вектора, исходящих из начала O', которые, со своей стороны, вполне определяют рассматриваемое аффинное преобразование.

4. Чтобы установить отображение пространства на плоскость по данным векторам (A), (B), (C) также и геометрически, будем сначала исходить из какой-нибудь точки $p(x, y, z = 0)$, лежащей в плоскости xy; вектор, идущий от O к p, можно получить, умножая единичный вектор оси x на скаляр (число) x, единичный вектор оси y — на число y и складывая полученные два вектора (рис. 59). Но это построение сразу же можно перенести на E', ибо соотношение между плоскостью xy и плоскостью E' является, очевидно, обыкновенным двумерным аффинным соответствием (с не равным нулю определите-

лем). Итак, мы получим изображение p' точки p, умножая скалярно вектор (A) на x, вектор (B) иа y и складывая полученные произведения по правилу параллелограмма (рис. 60). Таким образом, мы можем построить отображение на плоскость E' каждой точки плоскости xy, а значит, и отображение по точкам всякой фигуры на ней.

5. Перенося эти рассуждения на произвольную точку пространства R, нетрудно прийти к такому результату (рис. 61): изображение p' точки p с коор-

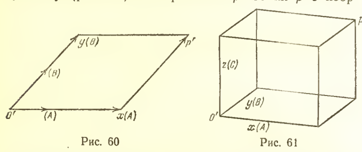


Рис. 60 Рис. 61

динатами x, y, z получается посредством векторного сложения (по правилу параллелограмма) векторов (A), (B), (C), предварительно умноженных соответственно на x, y, z. В силу коммутативности сложения это построение может быть выполнено $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ различными способами, так что точка p' получается как конец шести различных ломаных, состоящих из соответственно параллельных и равных отрезков. Образованная ими фигура (рис. 61) является, очевидно, отображением принадлежащего пространству R параллелепипеда, ограниченного тремя координатными плоскостями и тремя параллельными им плоскостями, проходящими через точку p. Мы уже с юности привыкли сразу же воспринимать подобные плоские фигуры как изображение пространственных фигур, в особенности когда такому представлению помогают путем утолщения лежащих спереди ребер[86]). Эта привычка настолько сильна, что указанное изображение параллелепипеда кажется почти тривиальным, тогда как в действительности оно представляет собой чрезвычайно примечательную теорему.

6. При помощи этого последнего построения можно дать на плоскости E' изображение всякой про-

странственной фигуры, т. е. всех ее точек. Я рассмотрю только один пример.

Имея шар с центром в начале O и радиусом единица, рассмотрим прежде всего те окружности, по которым он пересекает координатные плоскости. Например, окружность пересечения шара с плоскостью xy имеет своими сопряженными, т. е. взаимно перпендикулярными, радиусами единичные векторы на осях x и y, поскольку же осуществляется аффинное отображение, то этой окружности соответствует некоторый эллипс (рис. 62), для которого точка O' служит центром, а векторы (A) и (B) сопряженными полудиаметрами, так что этот эллипс вписан в параллелограмм, построенный на векторах $2(A)$ и $2(B)$. Точно так же и эллипсы, соответствующие двум другим окружностям пересечения, имеют своими центрами точку O', а векторы (B) и (C) и соответственно (A) и (C) сопряженными полудиаметрами.

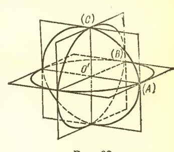


Рис. 62

Основная теорема Польке.

7. Составив себе, таким образом, полную картину природы аффинных соответствий (3) с равным нулю определителем, мы должны еще сделать последний, решающий шаг в наших исследованиях, а именно, показать, что упомянутые аффинные соответствия действительно возникают при аксонометрическом проектировании так, как мы это утверждали выше. Здесь главную роль играет так называемое фундаментальное предложение аксонометрии, которое К. Польке, профессор начертательной геометрии в строительной академии в Берлине, открыл в 1853 г. и опубликовал в 1860 г. в своем «Учебнике начертательной геометрии»*). В одной своей работе**) Шварц впервые

*) Pohlke K. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. — Berlin, 1860.
**) Schwarz H. A.//J. reine angew. Math. — 1863. — Bd. 63. — S. 309.

опубликовал элементарное доказательство этого предложения и одновременно подробно описал интересную историю его открытия [87]).

Сам Польке определяет аксонометрию не аналитически, а геометрически — как изображение пространства параллельными лучами (связанное еще в случае необходимости с некоторым преобразованием подобия); его теорема утверждает тогда, что при таком изображении единичные векторы (исходящие из начала) на осях прямоугольной системы координат в пространстве могут перейти в три *произвольных* вектора [88]) на плоскости E', исходящих из точки O'. В том, что наше отображение, определенное аналитически, действительно приводит к таким трем произвольным векторам, мы смогли легко убедиться в п. 3; для нас поэтому более глубокий смысл предложения Польке заключается в том, что произвольное отображение (3) (с. 125), определенное *аналитически*, может быть получено *геометрически* путем параллельного проектирования и изменения масштаба, причем параллельные прямые, упомянутые в п. 1, оказываются проектирующими лучами.

8. Я хотел бы здесь наметить примерный ход прямого аналитического доказательства сформулированного таким образом предложения. Направляя наше внимание на два семейства параллельных плоскостей пространства R

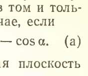
$$A_1x + B_1y + C_1z = \xi, \qquad A_2x + B_2y + C_2z = \eta$$

(где ξ, η — переменные параметры), мы замечаем, что каждая пара значений ξ, η определяет одну из названных параллельных прямых. Если бы нам удалось поместить в пространстве R картинную плоскость E', а на ней такую прямоугольную систему координат x', y' с подходящим масштабом, чтобы каждый луч ξ, η пересекал эту картинную плоскость E' в точке $x' = \xi$, $y' = \eta$, то отображение (3) действительно было бы геометрически осуществлено желаемым образом.

Но для этого, прежде всего, плоскости $\xi = 0$, $\eta = 0$ должны пересекать упомянутую плоскость E' по координатным осям $O'y'$ и соответственно $O'x'$, т. е. по взаимно перпендикулярным прямым; обозначим через θ_1, θ_2 углы (определяющие положение пло-

скости E') между прямой $\xi = \eta = 0$ (рис. 63) и каждой из этих осей, а через α (известный нам) угол между плоскостями $\xi = 0$, $\eta = 0$; тогда по известной из сферической тригонометрии теореме косинусов, примененной к трехгранному углу, образованному плоскостями $\xi = 0$, $\eta = 0$ и E', косинус угла между прямыми $O'x'$, $O'y'$ равен $\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\alpha$; следовательно, этот угол будет прямым в том и только в том случае, если

$$\operatorname{ctg}\theta_1 \operatorname{ctg}\theta_2 = -\cos\alpha. \quad (a)$$



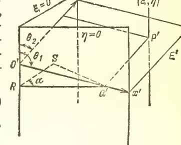


Рис. 63

Но каждая плоскость

$$A_1x + B_1y + C_1z = \xi$$

пересекает E' по прямой $x' = \text{const}$; если Q' — пересечение этой прямой с осью x', то соответствующее значение x' оказывается равным $O'Q'$ с точностью до подлежащего еще определению масштабного множителя λ системы координат на E'; опуская перпендикуляры $Q'S$, $Q'R$ на плоскость $\xi = 0$ и соответственно на прямую $\xi = \eta = 0$, получаем [89])

$$O'Q' = \frac{Q'R}{\sin\theta_1}, \qquad Q'R = \frac{Q'S}{\sin\alpha},$$

а поскольку $Q'S$ как кратчайшее расстояние между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1z = \xi$ легко вычисляется по известной формуле аналитической геометрии в пространстве, то окончательно имеем [90])

$$x' = \lambda O'Q' = \lambda \frac{\xi}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sin\theta_1 \sin\alpha}.$$

Совершенно аналогично получаем выражение для координаты y' точек, лежащих на линии пересечения плоскости $A_2x + B_2y + C_2z = \eta$ с плоскостью E':

$$y' = \lambda \frac{\eta}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}\ \sin\theta_2 \sin\alpha}.$$

Для того же чтобы каждый луч, определяемый любой парой значений параметров ξ, η, пересекал, согласно нашему желанию, плоскость E' как раз в точке $x' = \xi$, $y' = \eta$, необходимо, чтобы

$$\lambda = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sin\theta_1 \sin\alpha = \\ = \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}\ \sin\theta_2 \sin\alpha, \quad \text{(b)}$$

откуда для θ_1, θ_2 получается второе уравнение

$$\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sin\theta_1 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}\ \sin\theta_2. \quad \text{(c)}$$

Очень простое вычисление показывает, что уравнения (a), (c) дают для $\operatorname{ctg}\theta_1$, $\operatorname{ctg}\theta_2$ только одну пару действительных решений[91]), определенных с точностью до знака $\pm$; другими словами, имеется, по существу, только одно (т. е. не считая симметрии относительно плоскости, нормальной к прямой $\xi = \eta = 0$) положение плоскости E', для которого реализуется аксонометрическое аффинное соответствие $x' = \xi$, $y' = \eta$, коль скоро масштаб для прямоугольной системы координат на E' выбран сообразно равенствам (b). Весь этот ход идей можно еще больше геометризовать, если исходить из того условия, что единичные точки на осях x' и y' (т. е. точки, для которых $x' = 1$ и соответственно $y' = 1$) должны попасть на прямые $\xi = 1$, $\eta = 0$ и $\xi = 0$, $\eta = 1$. Тогда наша задача принимает такую форму: найти плоскость E', которая пересекла бы заданную треугольную призму по прямоугольному равнобедренному треугольнику.

После этого подробного изложения едва ли является необходимым долго останавливаться на уже высказанном выше обратном утверждении: каждая аксонометрическая проекция представляет собой некоторое аффинное преобразование с определителем, равным нулю. В справедливости этого предложения можно убедиться, применяя, как и выше (с. 116), на картинной плоскости E' сначала косоугольные координаты, получаемые из осей x и y пространства R путем параллельного проектирования, и переходя затем путем некоторой линейной подстановки к наперед заданной на E' прямоугольной системе координат.

Заканчивая этим настоящую главу об аффинных соответствиях, обращу ваше внимание еще на возможность получить экспериментальным путем наглядное представление о возникновении аксонометрического изображения, а именно, отбрасывая на экран с помощью проекционного фонаря (который следует представить себе расположенным крайне далеко) теневые изображения некоторых простых моделей (квадрата, круга, эллипса, куба); при этом вы получите точное подтверждение наших результатов о преобразовании фигур и, в частности, сможете легко подтвердить на опыте также и справедливость теоремы Польке, подвергая теневое изображение трех взаимно перпендикулярных штанг всевозможным изменениям, получаемым при передвижении как самой модели, так и проекционной плоскости (экрана).

Теперь мы переходим к новой главе, которая рассматривает более общие, а именно проективные преобразования, охватывающие аффинные преобразования как частные случаи.

II. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Аналитическое определение; введение однородных координат. Здесь я тоже сразу же рассматриваю трехмерное пространство.

1) За исходный пункт я беру аналитическое определение проективного преобразования. Но на этот раз мы полагаем x', y', z' равными не целым, а дробно-линейным функциям x, y, z, которые, однако, все — и это является чрезвычайно существенным — должны иметь один и тот же знаменатель:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4},$$
$$y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4}, \qquad (1)$$
$$z' = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4}.$$

Каждой точке x, y, z соответствует в силу (1) вполне определенная конечная (т. е. *не бесконечно удаленная*) точка x', y', z' при условии, что этот общий знаменатель отличен от нуля. Если же точка x, y, z приближается к плоскости[92]) $a_4x + b_4y + c_4z +$

$+d_4=0$, то соответствующая точка x', y', z' — это и является новым по сравнению с аффинным преобразованием — удаляется в бесконечность; указанную плоскость называют «плоскостью схода», а ее точки — «точками схода» и говорят, что при проективном преобразовании они соответствуют бесконечно удаленным элементам пространства: так называемой бесконечно удаленной плоскости и соответственно бесконечно удаленным точкам.

2) При исследовании возникающих здесь проблем оказывается, как известно, очень целесообразным ввести однородные координаты, т. е. ввести вместо трех координат точки x, y, z четыре величины ξ, η, ζ, τ, определяемые равенствами

$$x=\frac{\xi}{\tau}, \quad y=\frac{\eta}{\tau}, \quad z=\frac{\zeta}{\tau};$$

эти четыре величины рассматриваются как независимые переменные с тем единственным ограничением, что они не должны все одновременно обращаться в нуль и что ни одна из них не должна становиться бесконечно большой. Поэтому каждой точке x, y, z соответствует бесконечное множество систем значений $\rho\xi$, $\rho\eta$, $\rho\zeta$, $\rho\tau$, где ρ — произвольный множитель (отличный от нуля); обратно, каждая система значений ξ, η, ζ, τ, где $\tau\neq 0$, задает определенную конечную точку x, y, z (ту же точку задают и все системы значений $\rho\xi$, $\rho\eta$, $\rho\zeta$, $\rho\tau$). Однако при $\tau=0$ по крайней мере одно из частных x, y, z становится бесконечно большим; сообразно этому принимают, что каждая система значений[93]) ξ, η, ζ, $\tau=0$ должна означать «бесконечно удаленную» точку, причем все системы $\rho\xi$, $\rho\eta$, $\rho\zeta$, 0 дают одну и ту же точку. Этим вводятся строго аналитическим путем те точки, которые обыкновенно присоединяют к обычным конечным точкам в качестве «бесконечно удаленных».

Опыт показывает, что оперирование с однородными координатами вызывает у многих, во всяком случае у начинающих, неприятное чувство. Я думаю, что виною этому является та как бы неопределенность, текучесть этих величин, которую вносит произвольный множитель ρ. Быть может, отчетливое подчеркивание этого обстоятельства будет содействовать устранению такого ощущения.

Для этой же цели представляется целесообразным добавить здесь кое-какие соображения о некоторых геометрических представлениях, которые можно связать с однородными координатами. При этом сначала я буду говорить о координатах не в пространстве, а на плоскости E. В этом случае для обеих прямоугольных координат полагаем

$$x=\frac{\xi}{\tau}, \qquad y=\frac{\eta}{\tau}.$$

Условимся рассматривать ξ, η, τ как прямоугольные координаты в некотором трехмерном пространстве, а нашу плоскость E будем рассматривать как плоскость $\tau=1$ этого пространства, параллельную плоскости $\xi\eta$ (рис. 64), полагая на ней $x=\xi$, $y=\eta$. Если соединить точку x, y на плоскости E прямой линией с точкой O, то, как известно, на этой прямой отношения $\frac{\xi}{\tau}$ и $\frac{\eta}{\tau}$ будут сохранять постоянные значения, а именно, должно быть (для всех точек этого луча)

Рис. 64

$$\frac{\xi}{\tau}=x, \qquad \frac{\eta}{\tau}=y,$$

так как при $\tau=1$ как раз должны иметь место равенства $\xi=x$ и $\eta=y$. Таким образом, введение однородных координат означает просто отображение плоскости E в связку прямых, проектирующих эту плоскость из начала координат O вспомогательного трехмерного пространства. Именно, однородные координаты ξ, η, τ любой точки x, y плоскости E являются пространственными координатами точек той прямой этой связки, которая проектирует эту точку x, y. Поскольку каждой точке плоскости E соответствует бесконечное множество точек такой прямой, то смысл неопределенности однородных координат делается совершенно ясным. Исключение системы значений $\xi=\eta=\tau=0$ имеет свое геометрическое основание в том, что сама по себе точка O не фиксирует еще никакой определенной прямой, а значит, и

никакой точки на E. Столь же очевидным представляется и то, что нет нужды в бесконечных значениях для ξ, η, τ; ведь любую прямую можно получить путем соединения точки O с точками, лежащими в конечной части пространства. Наконец, становится совершенно ясным и то, каким образом мы избегаем бесконечно больших значений для координат x, y, заменяя бесконечно удаленные элементы плоскости E параллельными ей прямыми, проходящими через точку O и лежащими в плоскости $\tau = 0$[94]).

Употребление термина «бесконечно удаленная прямая» также получает при этом наглядное геометрическое содержание. Аналитически он является лишь выражением той абстрактной аналогии, что все «бесконечно удаленные точки» удовлетворяют линейному уравнению $\tau = 0$ совершенно подобно тому, как все точки каждой конечной прямой тоже удовлетворяют некоторому линейному уравнению.

Теперь же мы можем дать и чисто геометрическую интерпретацию: каждой прямой на плоскости E принадлежит в связке O некоторый плоский пучок прямых и, наоборот, каждый плоский пучок прямых в связке O — за исключением плоского пучка $\tau=0$, — определяет некоторую прямую на E; поэтому представляется целесообразным назвать прямой также и совокупность точек, соответствующих на плоскости E прямым этого последнего пучка, что и дает нам как раз «бесконечно удаленную прямую».

Совершенно аналогичные представления можно составить себе, вводя однородные координаты в трехмерном пространстве. А именно, мы представляем себе это последнее как «сечение», определяемое уравнением $\tau = 1$ в некотором вспомогательном четырехмерном пространстве ξ, η, ζ, τ и сопоставляем это сечение со связкой прямых, которая проектирует его из нулевой точки (начала) вспомогательного пространства. Тогда все дальнейшие рассуждения можно провести без взяких затруднений в почти буквальной аналогии с предыдущим и, в частности, перенести сюда истолкование бесконечно удаленных элементов. При этом применение четырехмерного пространства является, конечно, только средством для более удобного способа выражения, которому ни в коем случае

не следует приписывать какое-либо мистическое значение.

3) Вводя в уравнения (1) проективного преобразования однородные координаты, можно разбить эти уравнения благодаря равенству их знаменателей на следующие четыре уравнения при помощи произвольного множителя пропорциональности ρ':

$$\begin{aligned} \rho'\xi' &= a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1\tau, \\ \rho'\eta' &= a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2\tau, \\ \rho'\zeta' &= a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3\tau, \\ \rho'\tau' &= a_4\xi + b_4\eta + c_4\zeta + d_4\tau. \end{aligned} \tag{2}$$

Эта система уравнений, если не считать произвольного множителя ρ', изображает наиболее общую линейную однородную подстановку четырех переменных и представляет собой поэтому некоторое аффинное преобразование вспомогательного четырехмерного пространства, при помощи которого мы по методу п. 2) истолковываем однородные координаты. И в этом случае можно составить себе более конкретное представление, если ограничиться плоскостью. Чтобы получить наиболее общее проективное преобразование плоскости, достаточно подвергнуть пространство, в котором задана связка прямых, проектирующих эту плоскость, произвольному аффинному преобразованию с фиксированным началом O, а затем пересечь преобразованную связку тою же плоскостью. При этом мы каждый раз будем получать то же самое проективное преобразование, если, кроме того, соответственно множителю ρ' подвергнем пространство еще произвольной гомотетии с центром O, ибо проективное соответствие всецело определяется пересечениями прямых, проходящих через O, с нашей плоскостью, а каждая из этих прямых при указанной гомотетии переходит в себя.

Примененный здесь метод использования вспомогательного пространства называют принципом проектирования и пересечения; он оказывается и во многих других случаях очень полезным, так как позволяет, говоря вообще, более сложные соотношения в пространствах n измерений представлять в более простой и понятной форме при помощи рассмотрения вспомогательных пространств $n+1$ измерений.

4) Переходим к задаче обращения уравнений преобразования (2). Теория определителей учит, что переменные ξ, η, ζ, τ тоже являются линейными однородными комбинациями переменных ξ', η', ζ', τ' опять-таки, конечно, с произвольным множителем пропорциональности ρ:

$$\begin{aligned} \rho\xi &= a_1'\xi' + b_1'\eta' + c_1'\zeta' + d_1'\tau', \\ \rho\eta &= a_2'\xi' + b_2'\eta' + c_2'\zeta' + d_2'\tau', \\ \rho\zeta &= a_3'\xi' + b_3'\eta' + c_3'\zeta' + d_3'\tau', \\ \rho\tau &= a_4'\xi' + b_4'\eta' + c_4'\zeta' + d_4'\tau', \end{aligned} \tag{3}$$

лишь бы только определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

системы (2) не обращался в нуль. Следовательно, системы значений ξ, η, ζ, τ и ξ', η', ζ', τ' находятся при соблюдении этого условия во взаимно однозначном соответствии (с точностью до указанных произвольных общих множителей).

Замечу тут же — и вы этому сразу же поверите на основании нашего опыта в исследовании аффинных преобразований, — что и здесь случай $\Delta = 0$ оказывается достаточно интересным и не должен быть пропущен; ему соответствует отображение всего пространства на некоторую плоскость, что мы имеем во всякой центральной проекции, например, в фотографии. Но сначала мы рассмотрим общий случай, когда $\Delta \neq 0$.

5) Из (2) и (3) сразу же видно, что всякий раз, когда ξ, η, ζ, τ связаны линейным уравнением, подобное же уравнение связывает также ξ', η', ζ', τ' и наоборот. Каждой плоскости соответствует, следовательно, тоже некоторая плоскость; в частности, например, бесконечно удаленной плоскости пространства R' соответствует определенная, вообще говоря, конечная плоскость в пространстве R — уже упомянутая выше «плоскость схода»[95]). Как видите, употребление термина «бесконечно удаленная плоскость» оказывается крайне целесообразным, так как только

оно одно позволяет высказывать подобные предложения без всяких оговорок. Из сказанного непосредственно заключаем, что каждой прямой обязательно соответствует тоже некоторая прямая. Следовательно, всякое проективное преобразование является по терминологии Мёбнуса (с. 111) некоторой коллинеацией.

Геометрическое определение: проективное отображение как коллинеация.

6) Однако вся красота заключается в обратимости этого предложения: всякая коллинеация пространства, т. е. всякое взаимно однозначное преобразование[96]), которое каждую прямую переводит в некоторую прямую и которое, кроме того, удовлетворяет еще определенным почти самоочевидным условиям, является некоторым проективным преобразованием, т. е. преобразованием, определяемым аналитически уравнениями (1) или соответственно (2).

Принадлежащее Мёбиусу доказательство последнего предложения я проведу здесь ради удобства только для плоскости; для пространства оно выглядело бы совершенно аналогично. Ход идей этого доказательства сводится к следующему: в произвольно заданной коллинеации выбираем как-нибудь две четверки соответственных точек и сначала в п. a) показываем, что всегда существует такое проективное преобразование, которое переводит одну из таких произвольных четверок в другую. Но всякое проективное преобразование является в то же время некоторой коллинеацией, и мы доказываем далее в п. b), что при известных условиях может существовать только одна коллинеация, в которой являются соответственными те же самые две четверки. Следовательно, указанное выше проективное преобразование действительно должно совпадать с заданной коллинеацией, а в этом и заключается наше утверждение. Перехожу к детальному проведению обеих частей доказательства.

a) Отметим, что уравнения проективного преобразования на плоскости

$$\begin{aligned}\rho'\xi' &= a_1\xi + b_1\eta + d_1\tau,\\ \rho'\eta' &= a_2\xi + b_2\eta + d_2\tau,\\ \rho'\tau' &= a_3\xi + b_3\eta + d_3\tau\end{aligned}$$

содержат $9-1=8$ параметров (изменение величины ρ' не влияет на это преобразование). Требование о том, чтобы из двух наперед заданных точек первая переходила во вторую при некотором проективном преобразовании, заключает в себе два линейных условия для параметров этого преобразования, ибо здесь имеют значение только отношения трех однородных координат. Следовательно, соответствие двух четверок точек представляет $2\cdot 4=8$ линейных условий, точнее говоря, восемь линейных однородных уравнений для девяти величин $a_1, \ldots, d_3$. Такие уравнения, как известно, всегда допускают нетривиальное решение, так что всегда можно найти константы проективного преобразования, переводящего одну из заданных четверок в другую. Ручаться за то, что это последнее действительно является собственным проективным преобразованием с не равным нулю определителем и что оно определяется однозначно, можно, как легко видеть[97]), только в том случае, если каждая из обеих заданных четверок точек находится «в общем положении», т. е. если никакие три точки ни в одной из четверок не лежат на одной прямой; но ведь только для этого случая нам и нужно здесь это предложение.

b) Пусть теперь задана произвольная коллинеация (коллинеарное отображение) плоскостей E, E'. Если *1*, *2*, *3*, *4* — какие-либо четыре точки на E, из которых никакие три не лежат на одной прямой, и если *1'*, *2'*, *3'*, *4'* — соответственные точки на E', удовлетворяющие такому же условию, то наше утверждение заключается в том, что заданная коллинеация вполне однозначно определяется соответствием обеих этих четверок точек. Доказательство будет состоять в установлении того, что, исходя из этих двух взаимно соответственных четверок, можно построить коллинеацию одним и только одним способом, пользуясь только обеими ее характеристическими свойствами (однозначность и взаимное соответствие прямых). В качестве главного вспомогательного средства применим так называемые сети Мёбиуса, т. е. некоторые системы прямых, которыми мы, как паутиной, покроем наши плоскости.

Сперва проведем в каждой плоскости (рис. 65) по шесть прямых, соединяющих попарно четыре за-

данные точки; в коллинеации они должны соответствовать одна другой, ибо, например, прямой *1 2* на *E* должна быть сопоставлена именно такая прямая на *E'*, на которой лежало бы как изображение *1'* точки *1*, так и изображение *2'* точки *2*, а такой прямой может быть только *1' 2'*.

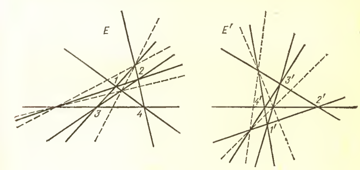


Рис. 65

Но, кроме основных четырех точек, необходимо должны будут находиться во взаимном соответствии также и вновь получаемые пересечения соответственных прямых, например точка (*1 4*, *2 3*) должна соответствовать точке (*1' 4'*, *2' 3'*): это также следует непосредственно из коллинеарности и взаимной однозначности отображения. Соединяя опять эти новые точки между собой прямыми, пересекая эти последние со старыми прямыми, соединяя снова полученные точки пересечения и продолжая все дальше этот процесс, получаем на каждой из плоскостей по все более густеющей сети прямых и точек, причем точки и прямые обеих сетей обязательно должны попарно соответствовать друг другу в искомой коллинеации.

Всякая произвольно заданная точка плоскости *E* либо сама является одним из узлов сети, либо может быть, как легко себе уяснить, заключена в неограниченно сужающиеся клетки этой сети, т. е. является предельной точкой для узловых точек сети. В первом случае соответственная точка на *E'* сразу же определяется однозначно как соответственный узел сети. А для определения соответственной точки во втором случае приходится внести в определение коллинеации

одно добавление, которое представлялось Мёбиусу настолько самоочевидным, что он даже не считал нужным отдельно его формулировать. А именно, устанавливаемое коллинеацией отображение должно быть непрерывным [98]); это означает, что каждой предельной точке какого-либо точечного множества на E должна соответствовать предельная точка соответственного точечного множества плоскости E'. Очевидно, что тогда и во втором случае, согласно предыдущему замечанию, соответственная точка на E' определяется однозначным образом. Этим доказывается справедливость нашего утверждения b) для всякой непрерывной коллинеации.

Таким же способом можно доказать, что каждая непрерывная коллинеация в трехмерном пространстве определяется пятью и вообще в n-мерном пространстве $n+2$ парами соответственных точек.

Припоминая сказанное в начале п. 6), получаем в качестве результата следующую точную теорему: проективные преобразования являются единственными взаимно однозначными преобразованиями, при которых все без исключения прямые переходят снова в прямые.

Поведение основных геометрических образов при проективных преобразованиях.

7) После этого отступления будем продолжать начатое нами в п. 5) исследование поведения основных геометрических образов при проективном или, как мы теперь можем также сказать, при коллинеарном преобразовании. Мы видели там, что неограниченная плоскость или прямая переходят при проективном преобразовании в образы того же рода, так что эти понятия сохраняют при проективных преобразованиях определенный, неизменный смысл.

В этом своем свойстве общие проективные преобразования сходны с аффинными, но они отличаются от этих последних своим поведением по отношению к понятию параллелизма. А именно, при проективных преобразованиях сохранение параллелизма двух прямых, имевшее место при аффинных преобразованиях (с. 112), перестает быть обязательным. Наоборот, бесконечно удаленная плоскость одного пространства может перейти в любую конечную (т. е. не бесконечно удаленную) плоскость другого про-

странства — в его плоскость схода; при этом бесконечно удаленной точке, общей двум параллельным прямым, соответствует, вообще говоря, некоторая лежащая на конечном расстоянии точка плоскости схода, в которой пересекаются прямые, соответствующие обеим параллельным прямым; за этим можно в точности проследить, например, при помощи однородных координат. В то же время мы, несомненно, убеждаемся также и в том, что понятие параллелизма не подвергается бессмысленному уничтожению, но что оно уступает место такому более общему представлению: бесконечно удаленные точки пространства заполняют некоторую плоскость, которая может быть проективно переведена во всякую другую (конечную) плоскость пространства и которая в силу этого оказывается совершенно равноправной со всеми этими плоскостями; ее только в известной мере произвольно выделяет предикат «является бесконечно удаленной». «Параллельными» называются тогда такие прямые (а также плоскости), пересечение которых лежит в этой выделенной плоскости; проективное преобразование может привести к тому, что они пересекутся в определенной другой плоскости и тогда их уже не называют параллельными.

В связи с этим свойством находится и то, что по отношению к проективным преобразованиям грассмановы основные образы тоже теряют свой инвариантный характер. Свободный вектор не переходит более в свободный же вектор, скользящий вектор уже не переходит в скользящий и т. д.

В самом деле, рассмотрим линейный элемент пространства R с шестью координатами

$$X = x_1 - x_2, \qquad Y = y_1 - y_2, \qquad Z = z_1 - z_2,$$
$$L = y_1 z_2 - y_2 z_1, \qquad M = x_2 z_1 - z_2 x_1, \qquad N = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

и образуем аналогичные величины $X', \ldots, N'$ из координат точек x'_1, y'_1; x'_2, y'_2, связанных с точками x_1, y_1; x_2, y_2 проективным преобразованием (1) (с. 133):

$$x'_1 = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d_1}{a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 z_1 + d_4} \text{ и т. д.,}$$

$$x'_2 = \frac{a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 + d_2}{a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 z_2 + d_4} \text{ и т. д.}$$

В силу этих формул выражения для $X', \ldots, N'$ принимают форму дробей, числители которых могут быть представлены как линейные комбинации одних только шести величин $X, \ldots, N$ с постоянными коэффициентами, тогда как их общий знаменатель

$$(a_4x_1 + b_4y_1 + c_4z_1 + d_4)(a_4x_2 + b_4y_2 + c_4z_2 + d_4)$$

содержит сами координаты точек и не может быть выражен исключительно через $X, \ldots, N$. Таким образом, кординаты преобразованного линейного элемента зависят не только от координат первоначального элемента, но и от специального положения его начала и конца, поэтому при передвижении отрезка *1 2* вдоль его прямой $X, \ldots, N$ будут сохранять свои значения, но $X', \ldots, N'$, вообще говоря, будут при этом изменяться, так что отрезок *1′ 2′* не является линейным элементом в грассмановом смысле.

В противоположность этому неограниченная прямая при проективном преобразовании сохраняется как таковая; это объясняется тем, что она изображается отношениями величин $X' : Y' : \ldots : N'$, из которых снова выпадает служивший помехой знаменатель, общий всем шести величинам; таким образом, эти отношения действительно выражаются исключительно через отношения $X : Y : \ldots : N$.

8) Мне осталось назвать еще несколько важных образов, которые при проективном преобразовании переходят в образы того же рода. Прежде всего всякое квадратное уравнение относительно x', y', z' получается, — в чем можно убедиться, если умножить его на квадрат общего знаменателя $a_4x + b_4y + c_4z + d_4$, — из некоторого квадратного уравнения относительно x, y, z, и наоборот. Это значит, что каждой поверхности второго порядка в пространстве R соответствует такая же поверхность в пространстве R'. Поэтому и пересечение такой поверхности с плоскостью, т. е. любая кривая второго порядка, тоже переходит в некоторую кривую второго же порядка. Аналогично этому, вообще, всякий алгебраический образ, определяемый одним или несколькими уравнениями относительно координат, преобразуется в однотипный с ним образ того же порядка; следовательно, тип (род) таких образов инва-

рнантен по отношению к проективным преобразованиям.

9) Наряду с этими инвариантными образами, определяемыми посредством уравнений, я должен еще указать на одну числовую величину, значение которой остается неизменным при всех проективных преобразованиях; она заменяет собой до некоторой степени понятия расстояния и угла, величины которых, как известно, не являются инвариантными даже при аффинных преобразованиях, не говоря уже о проективных. Я имею в виду, если говорить сначала о прямой, известную функцию расстояний четырех точек *1*, *2*, *3*, *4*, как-нибудь расположенных на прямой, а именно, упомянутое уже выше двойное отношение (с. 15)

$$\frac{\overline{12}}{\overline{14}} : \frac{\overline{32}}{\overline{34}} = \frac{\overline{12} \cdot \overline{34}}{\overline{14} \cdot \overline{32}}.$$

В самом деле, инвариантность этой величины по отношению к проективным преобразованиям легко может быть проверена вычислением, что мы, впрочем, еще раз сделаем в дальнейшем, исходя из других точек зрения.

Совершенно аналогично обстоит дело и с пучками прямых, если только брать вместо самих углов их синусы. А именно, обозначая через *1*, *2*, *3*, *4* прямые (или плоскости) некоторого пучка, получаем для их двойного отношения следующее выражение:

$$\frac{\sin(1,\ 2)}{\sin(1,\ 4)} : \frac{\sin(3,\ 2)}{\sin(3,\ 4)} = \frac{\sin(1,\ 2)\sin(3,\ 4)}{\sin(1,\ 4)\sin(3,\ 2)}.$$

Так как двойные отношения были первыми числовыми инвариантами проективных преобразований, с которыми случилось встретиться, то очень часто проективные геометры видели конечную цель всех стремлений в том, чтобы все дальнейшие инварианты проективных преобразований свести к двойным отношениям, хотя это и выглядело часто очень искусственным. Нам еще придется в дальнейшем вернуться к более детальному изучению этих соотношений.

Этих немногих указаний достаточно, чтобы показать вам, как можно через весь геометрический материал провести резкую разграничительную линию в зависимости от его отношения к проективным

преобразованиям. Все, что сохраняется при этих преобразованиях, составляет предмет возникшей в последнее столетие проективной геометрии [99]), о которой я уже говорил раньше и которую мы в дальнейшем должны будем изучить еще более глубоко. Это название, ставшее теперь общеупотребительным, лучше часто применявшегося раньше названия «геометрия положения», которым хотели подчеркнуть ее противопоставление «геометрии меры» или «элементарной геометрии», охватывающей все, также и проективно не инвариантные, геометрические свойства. Ибо старое название совершенно скрывает то, что многие метрические свойства, в частности значение двойного отношения, тоже принадлежат к этой дисциплине.

Центральное проектирование пространства на плоскость (проективное отображение с равным нулю определителем). Теперь я хотел бы еще поговорить, так же как и раньше при аффинных отображениях, о применениях проективных преобразований.

1) Я начну с указаний, относящихся к начертательной геометрии; здесь я могу лишь, оставляя в стороне всякую систематику, привести несколько характерных примеров.

а) Первым примером будет отображение пространства на плоскость посредством центральной перспективы, которая является прямым обобщением аксонометрии (параллельной перспективы); здесь проектирующие прямые не исходят из бесконечно удаленной точки, а проходят через произвольную конечную точку.

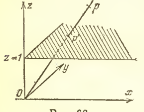


Рис. 66

Центр проекций мы поместим как раз в начало координат O, а за картинную плоскость примем плоскость $z = 1$ (рис. 66).

Тогда для изображения $p'(x', y, z')$ любой точки $p(x, y, z)$ будет во всяком случае

$$z' = 1,$$

а поскольку p, p' лежат на одной и той же прямой, проходящей через O, то

$$x' : y' : z' = x : y : z.$$

Поэтому уравнения нашего отображения имеют вид

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}, \quad z' = \frac{z}{z}.$$

Это отображение является, следовательно, частным случаем проективного преобразования, а аналогия с соответствующими соотношениями при аксонометрии заставляет нас предположить, что оно имеет равный нулю определитель. В самом деле, переходя к однородным координатам, получаем преобразование

$$\rho'\xi' = \xi, \quad \rho'\eta' = \eta, \quad \rho'\zeta' = \zeta, \quad \rho'\tau' = \zeta$$

с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Отдельные свойства этого преобразования вы легко сможете вывести по аналогии с приведенными выше рассуждениями, если только будете иметь в виду, что каждая плоскость, вообще говоря, связана с картинной плоскостью некоторым проективным (двумерным) соответствием с не равным нулю определителем. Отсюда, в частности, следует, что, например, двойное отношение любых четырех точек на одной прямой или четырех лучей, проходящих через одну точку, остается при этом преобразовании неизменным.

Рельефная перспектива.

b) Второй пример относится к некоторому проективному соответствию с не равным нулю определителем, которое включает в себя центральную перспективу как предельный случай и называется рельефной перспективой. Требуется изготовить такое рельефное изображение некоторого предмета, чтобы оно посылало глазу зрителя, помещенному в определенной точке, такие же лучи, какие оригинал посылал бы наблюдателю, помещенному в соответствующее место. При надлежащим образом расположенной системе координат это опять-таки означает, что точка-оригинал и точка-изображение должны находиться

на одной и той же прямой, проходящей через начало координат:

$$x' : y' : z' = x : y : z. \qquad (1)$$

Все различие по сравнению с предыдущим случаем заключается в том, что оригинал не отображается на плоскость, а лишь сжимается в некоторую узкую часть пространства конечной ширины.

Я утверждаю сразу же, что это преобразование дается формулами

$$x' = \frac{(1+k)\,x}{z+k}, \qquad y' = \frac{(1+k)\,y}{z+k}, \qquad z' = \frac{(1+k)\,z}{z+k}, \qquad (2)$$

которые представляют собой во всяком случае некоторое проективное преобразование и удовлетворяют, очевидно, уравнениям (1). Определитель, составленный для соответствующих им однородных уравнений

$$\rho'\xi' = (1+k)\,\xi, \qquad \rho'\eta' = (1+k)\,\eta,$$
$$\rho'\zeta' = (1+k)\,\zeta, \qquad \rho'\tau' = \zeta + k\tau,$$

равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{vmatrix} = k(1+k)^3$$

и, следовательно, будет отличен от нуля, если только не будет $k = 0$ или $k = -1$.

При $k=0$ формулы (2) как раз и переходят в предыдущие формулы центральной перспективы, т. е. наш рельеф весь вырождается в плоскость; случай же $k = -1$ дает $x' = y' = z' = 0$, т. е. каждая точка пространства отображается в нулевую точку, — очевидно, совершенно тривиальное вырождение.

Для определенности примем $k > 0$. Чтобы уяснить себе геометрический смысл отображения (2), заметим сперва, что каждая плоскость $z = \text{const}$ переходит в параллельную ей плоскость с аппликатой

$$z' = \frac{(1+k)\,z}{z+k}. \qquad (3)$$

Взаимное отображение этих двух плоскостей, осуществляемое проектирующими прямыми, исходящими

из точки O, является вполне наглядным, так что остается только уяснить себе сам закон (3).

При $z = \infty$ (соответственно $\tau = 0$) получается $z' = 1 + k$. Плоскость, проведенная параллельно плоскости xy на расстоянии $1 + k$, является, таким образом, плоскостью схода пространства изображений и образует как бы задний план (фон) рельефа, на который отображается бесконечно удаленный задний план пространства объектов. Важную роль играет еще плоскость, получающаяся при $z = 1$, в которой совпадают предмет и его изображение; в самом деле, при $z = 1$ получается также $z' = 1$. Если теперь z изменяется, возрастая от 1 до ∞, то z' монотонно возрастает от 1 до $1 + k$, т. е. если мы ограничимся предметами, помещенными позади плоскости $z=1$, то действительно получим в качестве изображения рельеф конечной глубины k. Такое ограничение всегда может и должно иметь место на практике (рис. 67).

Рис. 67

Составим двойное отношение для точек z, 1, z', 0:

$$\frac{z-1}{z-0} \cdot \frac{z'-0}{z'-1} = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{(1+k)\,z}{k\,(z-1)} = \frac{1+k}{k}.$$

Это показывает, что вообще при отображении (3) два значения z, z' в том и только в том случае соответствуют друг другу, если они образуют с точками 1 и 0 двойное отношение определенной величины (не зависящей от z и z').

В нашей математической коллекции имеется модель, которая изображает в рельефной перспективе шар на кубе, круглый конус и круглый цилиндр; рассматриваемая с правильного расстояния, она дает очень отчетливое впечатление тел, служащих оригиналом. Конечно, очень большую роль играют здесь психологические моменты. Ибо одно только то, что в глаз вступают такие же лучи, как от некоторого тела, не является еще достаточным для получения впечатления о наличии этого тела; во всяком случае чрезвычайно важной является здесь также и привычка. А именно, поскольку нам несравненно чаще

приходилось видеть шар на кубе, чем приплюснутый эллипсоид на узеньком гексаэдре (таков вид рельефно перспективного изображения), то мы уже заранее склонны объяснить световое впечатление первой из этих двух причин. Более подробное рассмотрение относящихся сюда моментов предоставим психологам.

Ограничусь сказанным для вашего первого ознакомления с применением проективных преобразований в начертательной геометрии. Конечно, все эти замечания настойчиво требуют дальнейшего углубления, и, прежде чем оставить эту область, я хотел бы порекомендовать вам заняться обстоятельным изучением начертательной геометрии, которая, как мне кажется, является необходимой для каждого преподавателя математики.

Применение проектирования для вывода свойств конических сечений.

2) Второе применение проективных преобразований, на котором я хочу теперь остановиться, касается доказательства геометрических предложений. Для этой же цели мы уже использовали раньше (с. 118—119) аффинные преобразования.

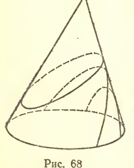


Рис. 68

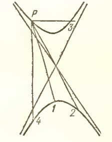
a) Исходим из того, что окружность, будучи подвергнута проективным преобразованиям или соответственно центральным перспективам, переходит в любое «коническое сечение», т. е. в сечение произвольной плоскостью конуса, боковая поверхность которого образована проектирующими прямыми, проходящими через точки окружности; здесь перед вами модель, которая показывает, как таким образом получаются эллипс, гипербола и парабола (рис. 68).

b) Для проективной геометрии существует, следовательно, только одно коническое сечение, ибо любые два таких сечения могут быть проективно переведены в окружность, а значит, и друг в друга. Подразделение же на эллипсы, параболы и гиперболы не указывает с этой точки зрения на какое-либо абсолютное

внутреннее различие, а касается только случайного положения относительно прямой, которую обычно выделяют из других прямых в качестве «бесконечно удаленной».

c) Установим теперь следующую основную теорему о двойном отношении в конических сечениях: любые четыре неподвижные точки *1*, *2*, *3*, *4* конического сечения проектируются из пятой подвижной точки P того же конического сечения четырьмя лучами, которые имеют постоянное двойное отношение, не зависящее от положения точки P (на сечении).

Для доказательства вернемся к той окружности, из которой рассматриваемое коническое сечение возникает посредством центральной перспективы; поскольку при этом (т. е. при перспективном преобразовании) двойные отношения остаются неизменными, то наше предложение во всяком случае будет, вообще, справедливым, если только на этой окружности четыре точки $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, соответствующие точкам



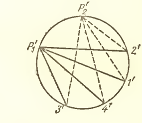


Рис. 69

конического сечения (рис. 69), проектируется из произвольных двух других точек P_1', P_2' той же окружности лучами с одинаковым двойным отношением. А это непосредственно вытекает из того, что, согласно теореме о вписанных углах, углы пучка P_1' ($1'$, $2'$, $3'$, $4'$) соответственно равны углам пучка P_2' ($1'$, $2'$, $3'$, $4'$); следовательно, будут равны также одно другому и двойные отношения для обеих четверок лучей, составленные из синусов углов.

d) На основании этого предложения Штейнер дал общее определение конических сечений, исходя из двух «проективно сопряженных» пучков лучей,

в которых каждые две соответственные четверки лучей имеют одинаковое двойное отношение. Коническое сечение представляет тогда геометрическое место точек пересечения соответственных лучей этих проективно сопряженных между собой пучков. Надеюсь, что этих немногих указаний будет достаточно для того, чтобы сделать понятным для вас, какое огромное значение проективные преобразования имеют для теории конических сечений. Подробности вы можете найти в любой книге по проективной геометрии[100]).

А теперь, следуя общему ходу мыслей этого второго раздела нашего курса, мы перейдем к новым классам геометрических преобразований, которые уже не принадлежат к линейным преобразованиям, рассматривавшимся нами до сих пор, начиная с движений и кончая наиболее общими проективными отображениями.

III. ВЫСШИЕ ТОЧЕЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Мы займемся теперь исследованием таких преобразований, которые изображаются уже не линейными, а высшими рациональными, алгебраическими либо даже трансцендентными функциями:

$$x' = \varphi(x, y, z), \quad y' = \chi(x, y, z), \quad z' = \psi(x, y, z).$$

Следуя тенденции этого курса, я не стану излагать здесь общую систематику вопроса, а приведу лишь ряд отдельных примеров, которые имеют важное значение как для чистой математики, так и в особенности для применений.

В первую очередь я остановлюсь на самом употребительном из таких преобразований — на преобразовании посредством обратных радиусов, которое называется также *инверсией*.

1. Преобразование посредством обратных радиусов

При этом преобразовании каждой точке p сопоставляется, как известно, та точка p' луча Op, исходящего из начала координат O и проходящего через p, для которой произведение $Op \cdot Op'$ равно некоторой заданной константе (рис. 70); этому соотношению преобразование и обязано своим названием.

Вы знаете, что эти преобразования играют большую роль в чистой математике, прежде всего в теории функций комплексной переменной. Но не менее часто встречаются они также в физике и других применениях — об одном из этих применений нам еще придется говорить особо.

1) При изучении нашего преобразования я снова начну с вывода его уравнений в прямоугольных координатах. Поскольку p и p' лежат на одной прямой, проходящей через O, то должно быть

$$x' : y' : z' = x : y : z, \qquad (1)$$

а соотношение между расстояниями Op, Op', если для простоты принять упомянутую константу равной единице, даст

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 1. \qquad (2)$$

Рис. 70

Отсюда выводим такие уравнения преобразования:

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad y' = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$z' = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}; \qquad (3)$$

точно так же получается, что и, обратно [101]),

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \qquad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$
$$z = \frac{z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \qquad (4)$$

Итак, как координаты точки p, так и координаты точки p' выражаются через координаты другой точки (т. е. p' или соответственно p) в виде некоторых, в обоих случаях одних и тех же рациональных функций .Знаменателем служит квадратичное выражение; мы здесь имеем дело с частным случаем так называемого квадратичного бирационального преобразования. Существует обширный класс таких бирациональных (вообще говоря, взаимно однозначных) преобразований, которые в обоих направлениях изображаются посредством рациональных функций. Под названием кремоновых *) преобразований они сдела-

*) Кремона (1830—1903) — выдающийся итальянский геометр.

лись предметом теории, достигшей широкого развития. Я считал желательным хотя бы упомянуть о них здесь в связи с изучением их простейшего представителя.

2) Уравнения (3), (4) показывают, что, за исключением пока что начала координат, каждой точке p пространства сопоставляется некоторая точка p' и, наоборот, каждой точке p' — некоторая точка p. Если же приближать x, y, z одновременно к нулю, то знаменатель выражений (3) оказывается бесконечно малой высшего порядка, чем числители, и поэтому координаты x', y', z' становятся бесконечно большими [102]; мы могли бы поэтому назвать начало координат точкой схода нашего преобразования.

Если же, наоборот, x', y', z' по тому или другому закону возрастают бесконечно, то в силу (4) x, y, z стремятся к нулю; следовательно, если бы мы захотели придерживаться введенной нами выше терминологии, то должны были бы сказать, что бесконечно удаленная часть пространства состоит только из одной точки. Но ведь введение «бесконечно удаленной плоскости» было в предыдущем разделе только удобным способом выражения, приспособленным к проективным преобразованиям; это было связано с тем, что при этих преобразованиях бесконечно удаленная часть пространства ведет себя как плоскость, т. е. может быть преобразована в точки той или иной конечной плоскости; этот же способ выражения давал возможность высказывать теоремы без всяких исключений и без различения отдельных случаев. Но ничто нам не мешает ввести здесь другой, отличный от предыдущего способ выражения, чтобы с его помощью и теперь, как и раньше, прийти к теоремам, справедливым без всякого исключения. Бесконечно удаленная область переводится преобразованием обратных радиус-векторов в одну точку; поэтому мы теперь будем говорить, что существует только *одна* бесконечно удаленная точка, которая при нашем преобразовании как раз соответствует началу координат. Тогда наше преобразование действительно оказывается *взаимно однозначным без всякого исключения* [103].

Сколько бы мы ни подчеркивали, что здесь, как и раньше, ни в малейшей степени не имеются в виду какие-либо метафизические представления о природе бесконечно далекого, это оказывается недостаточным.

Всегда снова и снова находятся люди, которые, односторонне привыкнув к какому-нибудь одному из этих двух способов выражения, стремятся придать ему какой-то трансцендентальный смысл; такие представители двух разных точек зрения часто вступают друг с другом в спор. В действительности же и те, и другие не правы: они забывают, что речь идет о произвольных соглашениях, приспособленных в каждом отдельном случае только к той или иной определенной цели.

3) Важнейшее свойство нашего преобразования состоит в том, что при нем, вообще говоря, сферы переходят снова в сферы. Действительно, уравнение всякой сферы имеет вид

$$A\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) + Bx' + Cy' + Dz' + E = 0; \quad (5)$$

подставляя сюда вместо x', y', z' их выражения из уравнений (3), а вместо $x'^2 + y'^2 + z'^2$ его выражение из соотношения (2) (с. 153), получим после умножения на $x^2 + y^2 + z^2$ уравнение

$$A + Bx + Cy + Dz + E(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

т. е. действительно снова уравнение сферы [104]). При этом, конечно, следует заметить, что уравнением (5) охватываются при $A = 0$ также и плоскости; здесь целесообразно будет рассматривать их как частный случай сфер, а именно, как такие сферы, которые содержат бесконечно удаленную точку. При нашем преобразовании они переходят в сферы, проходящие через нулевую точку, которая как раз и соответствует бесконечно удаленной точке; точно так же и, обратно, сферы, содержащие нулевую точку, переходят в сферы, содержащие бесконечно удаленную точку, т. е. в плоскости. Таким образом, при этих соглашениях действительно оказывается справедливой без всякого исключения теорема о том, что сферам всегда соответствуют сферы.

4) Всякие две сферы (а также сфера с плоскостью) пересекаются по окружности; поэтому каждой окружности соответствует тоже окружность; при этом прямые линии следует рассматривать тоже как «окружности, проходящие через бесконечно удаленную точку», которым в силу нашего преобразования соответствуют окружности, проходящие через нулевую точку.

Инверсор Поселье.

5) Это последнее предложение остается, конечно, в силе, если выполнять преобразование при помощи обратных радиусов только в пределах одной плоскости; в этом случае оно приводит к изящному решению проблемы направляющего механизма или «прямила», которая является чрезвычайно элементарной и принадлежит, собственно, к кругу интересов даже и нематематиков. Задача заключается в том, чтобы при помощи шарнирно соединенных неизменяемых штанг заставить некоторую связанную с ними точку описывать прямую линию; в прежнее время при конструировании паровых машин придавали особое значение такого рода механизмам, которые должны осуществлять связь между поршнем, совершающим прямолинейные движения вперед и назад, и концом кривошипа, движущимся по окружности.

Здесь нас интересует инверсор, сконструированный в 1864 г. французским офицером Поселье и вызвавший тогда большой шум, хотя его конструкция очень проста и естественна.

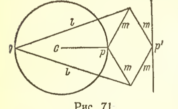


Рис. 71

Этот аппарат состоит, прежде всего, из соединенных шарнирами шести штанг (рис. 71), две из которых имеют длину l и соединяются в неподвижной точке O, остальные же четыре, имеющие длину m, образуют ромб, две противоположные вершины которого соединяются с концами штанг l. Две другие свободные вершины ромба обозначим через p и p'. Аппарат имеет две степени свободы: во-первых, обе штанги l можно произвольно приближать одну к другой или раздвигать, а во-вторых, обе их можно произвольно вращать как целое вокруг O. При каждом таком движении три точки O, p, p', как видно из очень простых геометрических соображений, всегда остаются на одной прямой, причем произведение

$$Op \cdot Op' = l^2 - m^2$$

сохраняет постоянное значение [105]), не зависящее от положения точки p, следовательно, этот аппарат дей-

ствительно выполняет преобразование посредством обратных радиусов с центром в O. Поэтому достаточно вести точку p по окружности, проходящей через точку O, чтобы, согласно предложениям в п. 4), действительно заставить точку p' двигаться по некоторой прямой. А для получения движения точки p по окружности присоединяем к системе еще седьмой стержень pC, второй конец C которого закреплен как раз посередине между O и начальным положением точки p; тогда остается только одна степень свободы и p' действительно передвигается по прямой. Впрочем, следует заметить, что точка p' не может описывать всю неограниченную прямую; свобода ее движения ограничена тем, что расстояние ее от O всегда меньше $l+m$.

6) Из общих свойств преобразования при помощи обратных радиусов я должен еще отметить свойство сохранения углов, которое заключается в том, что угол, образуемый любыми двумя поверхностями в любой точке линии их пересечения, остается одним и тем же до и после преобразования. Я не буду останавливаться на доказательстве [106]), ибо здесь для нашего обзора нет необходимости вдаваться в подробности [107]).

Стереографическая проекция сферы. Как частный случай преобразования при помощи обратных радиусов можно рассматривать стереографическую проекцию, которая имеет громадное значение в применениях. Мы получим ее следующим образом.

7) Рассмотрим такую сферу, которая переводится нашим преобразованием (3) в неподвижную плоскость $z'=1$. По третьей из формул (3) уравнением этой сферы будет

$$1=\frac{z}{x^2+y^2+z^2};$$

его можно переписать так:

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Искомым оригиналом для плоскости $z'=1$ является, следовательно, сфера с центром в точке $z=1/2$ оси z и радиусом, равным $\frac{1}{2}$; она проходит через нулевую точку и касается картинной плоскости

$z' = 1$ (рис. 72). Подробности взаимоотношений между плоскостью и сферой можно сделать вполне наглядными, если воспользоваться для отыскания соответственных точек связкою лучей, исходящих из нулевой точки; я приведу здесь без доказательства только следующие теоремы:

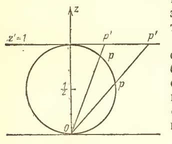


Рис. 72

1) Отображение является взаимно однозначным без каких-либо исключений, если рассматривать бесконечность на плоскости как одну точку, соответствующую точке O сферы.

2) Окружностям на сфере соответствуют окружности на плоскости, в частности, окружностям на сфере, проходящим через O, соответствуют на плоскости окружности, проходящие через бесконечно удаленную точку, т. е. прямые линии.

3) Соответствие между обеими поверхностями сохраняет углы; оно, как говорят, конформно.

То, что эта стереографическая проекция имеет в теории функций крупнейшее значение, всем вам должно быть известно; я напомню, что в предыдущем курсе *) мы уже очень часто применяли ее с большой пользой. Из прикладных наук, в которых она играет не менее важную роль, следует здесь особенно отметить географию и астрономию; она была известна уже античным астрономам, и еще теперь вы найдете в каждом атласе изображения полушарий и полярных стран земли в стереографической проекции. Из этой же прикладной области я заимствую еще несколько примеров.

2. Некоторые общие картографические проекции

Экскурс в этом направлении представляется мне как раз в настоящем курсе особенно уместным. Ведь теория географических карт является весьма важной областью в рамках школьного преподавания; не подлежит сомнению, что каждому учащемуся будет ин-

*) См. т. 1, с. 152.

тересно услышать, по какому именно принципу составлены карты в его атласе, и преподаватель математики наверное достигнет большей активности со стороны учащихся на своих занятиях, если он даст при случае желательные пояснения по этому вопросу, чем если бы он занимался исключительно абстрактными вопросами. Поэтому каждый кандидат на учительское звание должен быть знаком с этой областью, которая к тому же дает и математику интересные примеры точечных преобразований.

Наиболее целесообразным будет с самого начала представлять себе поверхность земного шара стереографически отображенной из одного из полюсов на плоскость xy; тогда всякое другое отображение точек поверхности шара на некоторую плоскость $\xi\eta$ изобразится двумя уравнениями вида

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \chi(x, y).$$

Первым видом отображений, часто применяемым на практике, являются изогональные (т. е. сохраняющие углы), или конформные отображения; они получаются, как учит теория функций, если рассматривать комплексную переменную $\xi + i\eta$ как аналитическую функцию комплексной переменной $x + iy$:

$$\xi + i\eta = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\chi(x, y).$$

Однако я считаю здесь необходимым отчетливо отметить, что как раз в географической практике очень часто употребляются также и отображения, не сохраняющие углов, так что ни в коем случае не следует — как это нередко бывает — рассматривать изогональные изображения как единственно важные.

Проекция Меркатора. Среди конформных отображений первое место занимает так называемая меркаторская проекция, которую открыл около 1550 г. математик Герхард Меркатор, носивший, собственно говоря, чисто немецкое имя Кремер[108]). Меркаторские карты земли вы найдете в любом атласе.

Меркаторская проекция определяется тем, что нашей аналитической функцией f является в данном случае логарифм. Поэтому она изображается уравнением

$$\xi + i\eta = \mathrm{Ln}(x + iy).$$

Мы, математики, можем сразу вывести свойства рассматриваемой проекции из этой краткой формулы, тогда как для географов, не имеющих достаточного математического образования, изучение меркаторской проекции представляет, конечно, значительные трудности. Вводя на плоскости xy полярные координаты (рис. 73), т. е. полагая $x + iy = re^{i\varphi}$, получим

$$\xi + i\eta = \mathrm{Ln}\,(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi,$$

так что

$$\xi = \ln r, \quad \eta = \varphi.$$

Предполагаем, что южный полюс земли является центром примененной стереографической проекции; тогда нулевая точка O на плоскости xy соответствует

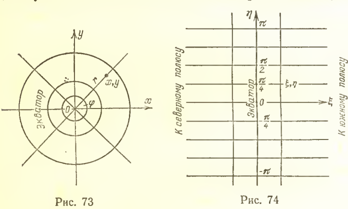


Рис. 73

Рис. 74

северному полюсу, а лучи $\varphi = \mathrm{const}$, проходящие через O, соответствуют земным меридианам. Поэтому при меркаторской проекции (рис. 74) эти последние превращаются в прямые $\eta = \mathrm{const}$, параллельные оси ξ; северный полюс ($\xi = -\infty$) лежит на них слева, а южный ($\xi = +\infty$) — справа в бесконечности. Поскольку угол φ определен только с точностью до кратного 2π, то отображение бесконечнозначно, и каждая параллельная (горизонтальная) полоса шириною 2π является уже изображением всей земной поверхности. Параллели (на поверхности земного шара), которым в стереографической проекции соответствуют круги $r = \mathrm{const}$, превращаются в меркаторской проекции в параллельные (вертикальные)

прямые $\xi = \text{const}$, т. е. в нормальные траектории к прямым, изображающим меридианы, чего и следовало ожидать, имея в виду изогональность изображения. В частности, экватору $(r = 1)$ соответствует ось η $(\xi = 0)$.

Теоремы Тиссо. Ограничусь одним этим примером, чтобы побудить вас к дальнейшему изучению многочисленных преобразований теории географических карт; зато я рассмотрю здесь еще одно предложение этой теории общего характера. Кто из вас занимался географией, тот наверное слыхал о *теоремах Тиссо* [109]), которые он развил в своем трактате. Мы можем очень просто уяснить себе содержание этих теорем, исходя из нашей точки зрения.

Пусть имеем две географические карты, т. е. два отображения поверхности земного шара на плоскость xy и на плоскость $\xi\eta$. Эти отображения могут быть какими угодно, в частности, не обязаны быть конформными. Но во всяком случае оба они взаимно связаны некоторым соотношением вида

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \chi(x, y).$$

Исследуем только окрестность двух соответственных точек x_0, y_0 и ξ_0, η_0, т. е. таких, что

$$\xi_0 = \varphi(x_0, y_0), \quad \eta_0 = \chi(x_0, y_0).$$

Введем новые переменные x', y', ξ', η', определяя их равенствами

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y';$$
$$\xi = \xi_0 + \xi', \quad \eta = \eta_0 + \eta'.$$

Применяя разложение функций φ, χ по формуле Тейлора, получаем

$$\xi' = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 x' + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_0 y' + \ldots,$$
$$\eta' = \left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)_0 x' + \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)_0 y' + \ldots$$

Здесь производные следует брать в точке $x = x_0$, $y = y_0$, а многоточиями обозначены члены высшего порядка малости относительно x', y'. Ограничимся настолько малою окрестностью точки x_0, y_0, чтобы выписанные линейные члены давали уже достаточное

приближение для действительных значений ξ', η'; при этом мы, конечно, исключаем такие особые точки x_0, y_0, в которых не существует подобной окрестности, следовательно, такие, например, точки, в которых все четыре первые производные одновременно обращаются в нуль, так что линейные члены совсем не дают никакого пригодного приближения. Присматриваясь к получаемым таким образом линейным уравнениям между x', y', ξ', η', мы приходим непосредственно к такому фундаментальному предложению, которое лежит в основании рассуждений Тиссо: связь между двумя географическими изображениями одной и той же местности в окрестности любой точки (лишь бы она была неособой) приближенно выражается некоторым аффинным соответствием. Применяя наши прежние теоремы об аффинных преобразованиях, мы действительно получаем все так называемые «предложения Тиссо».

Я напомню только главные моменты. Мы знаем, что прежде всего нужно обратить внимание на определитель аффинного преобразования — здесь, следовательно, на определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)_0 \end{vmatrix},$$

который, как известно, называют функциональным определителем функций φ, χ в точке $x = x_0$, $y = y_0$. Случай $\Delta = 0$ в этих применениях всегда исключают, ибо тогда небольшая часть плоскости xy, окружающая точку x_0, y_0, изображается дугой некоторой кривой в плоскости $\xi\eta$, а такое изображение географ едва ли сочтет за приемлемую карту. Поэтому мы должны здесь всегда принимать $\Delta \neq 0$. Раньше мы (с. 115) уже составили себе наглядную картину всех деталей такого аффинного преобразования, поэтому мы можем теперь сразу перенести сюда такое предложение: окрестность точки ξ_0, η_0 получается с рассматриваемой здесь точностью из окрестности точки x_0, y_0, если подвергнуть эту последнюю чистым деформациям в двух взаимно перпендикулярных направлениях и повернуть ее потом еще на некоторый подходящий угол. В книге Тиссо вы увидите, что он

действительно выводит это предложение ad hoc*) наглядным образом, так что вы имеете здесь интересный пример того, как представители прикладных наук своими силами удовлетворяют математическим запросам своих дисциплин; математику в таких случаях эти вещи кажутся, конечно, очень простыми, но все же для него поучительно знать, в чем нуждаются эти прикладные науки.

Теперь, наконец, я рассмотрю еще один, последний, общий класс точечных преобразований.

3. Наиболее общие взаимно однозначные непрерывные точечные преобразования

Все функции, которыми мы до сих пор пользовались для записи отображений, были непрерывными и сколько угодно раз дифференцируемыми и даже аналитическими (т. е. разложимыми в ряд Тейлора); зато мы допускали также и многозначные, даже бесконечнозначные функции (например, логарифм). Теперь же наше главное требование будет заключаться как раз в том, чтобы наши отображающие функции были взаимно однозначными без всякого исключения, а во всем остальном будем требовать только их непрерывности, не делая никаких предположений о существовании производных и т. д. Задача наша сводится к отысканию тех свойств геометрических фигур, которые остаются неизменными при этих наиболее общих взаимно однозначных и взаимно непрерывных преобразованиях.

Представьте себе, например, что вы изготовили какую-нибудь поверхность или тело из резины и наметили на ней какие-нибудь фигуры. Что в этих фигурах остается неизменным, если вы станете самым произвольным образом деформировать резину (растягивать, сжимать, изгибать), не разрывая ее?

Совокупность свойств, получаемых при изучении этого вопроса, образует область так называемого Analysis situs («анализ положения»), можно было бы сказать — область учения о чистейших соотношениях положения, совершенно не зависящих от отношений, связанных с понятием величины[110]). Это название

*) Для данного случая (*лат.*).

впервые ввел Риман, который в своей знаменитой работе 1857 г., посвященной теории абелевых функций, пришел к необходимости подобных исследований, исходя из теоретико-функциональных интересов *). Впрочем, и после этого часто бывало так, что в геометрии совершенно умалчивают об Analysis situs и обращаются к этому учению только в теории функций, когда в ней обнаруживается потребность. Совершенно не так поступает Мёбиус в своей работе 1863 г. Исходя из чисто геометрических интересов, он называет там фигуры, которые получаются одна из другой посредством взаимно однозначных взаимно непрерывных деформаций, элементарно соответственными, ибо свойства, инвариантные по отношению к этим преобразованиям, являются наиболее простыми из всех возможных свойств.

Род и связность поверхностей. Здесь мы ограничимся только исследованиями поверхностей. Сюда относится прежде всего одно открытое Мёбиусом свойство, которого еще не знал Риман, а именно, деление поверхностей на односторонние и двусторонние. Мы говорили уже раньше (с. 33) об одностороннем листе Мёбиуса и мы видели, что, непрерывно двигаясь по его поверхности, можно незаметно перейти с одной его стороны на другую, так что здесь теряет смысл различение двух сторон. Ясно, что это свойство сохраняется при всех непрерывных деформациях и что поэтому в Analysis situs действительно следует заранее различать односторонние и двусторонние поверхности.

Здесь мы ради простоты займемся только двусторонними поверхностями, тем более, что только они обыкновенно и применяются в теории функций; впрочем, теория односторонних поверхностей не является существенно более трудной. Оказывается, что всякую (двустороннюю) поверхность вполне характеризуют

---

*) Риман употребляет в этой работе слово «анализ», следуя Лейбницу, в первоначальном методологическом смысле, а не в том понимании, какое это слово приобрело в качестве математического термина. Термины «Analysis situs», а также «Geometria situs» создал еще Лейбниц (в рукописных работах и переписке с Гюйгенсом), имея в виду, однако, скорее особое геометрическое исчисление (Calculus situs), не пользующееся алгеброй, в противоположность аналитической геометрии.

в смысле Analysis situs два натуральных числа: число μ ее граничных кривых (контуров) и число p (так называемый «род») не разбивающих ее на части замкнутых линий — «сечений» (не имеющих общих точек с граничными контурами); точнее говоря, две двусторонние поверхности могут быть тогда и только тогда взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображены одна на другую (являются «элементарно соответственными» или, как теперь говорят, гомеоморфными), когда для них оба эти числа p и μ совпадают. Мы зашли бы слишком далеко, если бы я захотел изложить здесь доказательство этой теоремы [111]); я могу только разъяснить на отдельных примерах значение обоих чисел μ и p.

Представим себе расположенными рядом сферу, кольцевую поверхность и, наконец, поверхность двойного кольца (имеющего форму кренделя), как это схематически показано на рис. 75. Все три поверхности

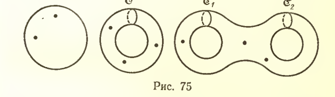


Рис. 75

являются замкнутыми, т. е. они не имеют граничных контуров: $\mu = 0$. В первом случае (сфера) каждое сечение по замкнутой линии разбивает поверхность на две отдельные части, т. е. также и $p = 0$. Во втором случае (кольцо) меридиан $\mathfrak{C}$ представляет собой замкнутую линию сечения, которая не разбивает поверхности, но если она уже проведена, то всякая другая замкнутая линия сечения действительно разбивает поверхность; это мы и имеем в виду, когда говорим, что $p = 1$. Наконец, в третьем примере $p = 2$, как показывают два различных меридиана $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ (по одному на каждом ушке). Прибавляя новые ушки («ручки»), можно прийти к поверхностям с произвольным p. Если же мы желаем также и числу μ дать какое-нибудь отличное от нуля значение, то достаточно проделать в этих поверхностях μ маленьких дырочек, так называемых «проколов», которые

каждый раз дают некоторую контурную линию. Таким образом, мы действительно можем образовать поверхности с любыми значениями p и μ, и с ними должны быть гомеоморфны все другие поверхности с такими же p, μ, как бы они ни отличались от первых поверхностей по своему внешнему виду. Теория функций дает много примеров таких поверхностей.

Я должен разъяснить еще термин «связность», который ввел Риман; этим термином он обозначает число $2p+\mu$ и называет соответствующую поверхность $(2p+\mu)$-связной. Если поверхность односвязна $(2p+\mu=1)$, то $p=0$, $\mu=1$, т. е. она гомеоморфна шару с одним проколом; такой шар может быть также непрерывно преобразован расширением этого прокола в плоский диск (рис. 76).

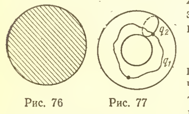


Рис. 76 Рис. 77

Далее, Риман вводит понятие поперечного сечения или «разреза», который ведет от одной граничной точки (на контуре) к другой. О разрезах можно, следовательно, говорить только тогда, когда действительно имеются контуры, следовательно, когда $\mu>0$. Имеет место такое предложение: каждый разрез уменьшает связность на единицу, так что, в частности, каждую поверхность с $\mu>0$ можно преобразовать в односвязную при помощи $2p+\mu-1$ разрезов. Если, например, возьмем кольцевую поверхность (рис. 77) с одним проколом $(p=\mu=1)$, то можно сначала провести разрез q_1, начинающийся и оканчивающийся в этом проколе, а затем второй разрез q_2 так, чтобы он начинался и заканчивался где-нибудь на первом разрезе, проходя в остальном по поверхности без пересечения с прежним разрезом, не разбивающим поверхности. Тогда связность действительно уменьшится от $2\cdot 1+1=3$ до 1.

Теорема Эйлера о многогранниках. То, что Analysis situs находит себе применение в физике, в частности в теории потенциала, является хорошо известным [112]). Но он имеет точки соприкосновения также и со школьным преподаванием, а именно, в виде эйлерова предложения о многогранниках, о ко-

тором я в заключение скажу еще несколько слов. Эйлер подметил, что для обыкновенного многогранника с плоскими гранями, имеющего E вершин, K ребер и F граней, всегда оправдывается соотношение [113])

$$E+F=K+2.$$

Если теперь станем как-либо взаимно однозначно и непрерывно деформировать этот многогранник, то в этих трех числах, а значит, и в этом равенстве ничто не изменится; следовательно, это равенство сохранит силу и в том случае, если E, F, K будут означать числа вершин, поверхностей (граней) и ребер при любом разбиении сферической поверхности или вообще какой-нибудь гомеоморфной ей поверхности, лишь бы только каждая частичная область (грань) была односвязна. И вот оказывается, что эту теорему легко можно сразу обобщить на поверхности любого рода. Если какую-нибудь поверхность, допускающую ровно p не разбивающих ее на части замкнутых линий сечения, разделить посредством K конечных дуг на F односвязных участков поверхности и если при этом образуется E вершин, то

$$E+F=K+2-2p.$$

Я предоставляю вам самим подобрать к этому примеры, а также найти доказательство или прочесть о нем; имеют место, конечно, еще гораздо более широкие обобщения этой теоремы.

На этом мы оставляем общее учение о точечных преобразованиях и попытаемся дать обзор важнейших классов таких преобразований, которые переводят точки в пространственные элементы иного рода.

IV. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ИЗМЕНЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЭЛЕМЕНТА

1. Двойственные преобразования

Первый такой класс состоит из тех соответствий, которые в двумерной области переводят точку в прямую и наоборот, а в трехмерной обменивают точку с плоскостью. Я ограничиваюсь здесь первым случаем (плоскостью), а во всем остальном следую тому ходу

идей, который впервые был употреблен Плюккером в 1831 г. во второй части его уже упомянутой выше (с. 89) работы. При этом исходной точкой является аналитическая формулировка.

Первая идея Плюккера заключается, как мы уже знаем (с. 92), в том, чтобы провести полную параллель между константами u, v, входящими в уравнение прямой

$$ux + vy = 1 \qquad (1)$$

и рассматриваемыми в качестве «координат прямой», и между обыкновенными (декартовыми) координатами точки, а затем построить здание аналитической геометрии двумя совершенно аналогичными «взаимными» или «дуальными» способами, пользуясь этими двумя видами координат. Так, на плоскости соответствуют одна другой кривая, изображаемая в координатах точки уравнением $f(x, y) = 0$, как геометрическое место точек, удовлетворяющих этому уравнению, и кривая, определяемая в координатах прямой уравнением $g(u, v) = 0$, как огибающая однократно бесконечного семейства прямых.

Преобразование в собственном смысле, которое мы хотим теперь рассмотреть, получается, конечно, лишь тогда, когда мы наряду с рассматривавшейся до сих пор одной плоскостью E введем еще вторую плоскость E' и свяжем координаты u, v прямой на E с координатами x', y' точки на E'. Самое общее преобразование такого типа должно быть, следовательно, задано двумя уравнениями

$$u = \varphi(x', y'), \quad v = \chi(x', y'), \qquad (2$$

т. е. с каждой точкой x', y' на плоскости E' сопоставляется та прямая на плоскости E, уравнение которой получается после подстановки в (1) этих значений (2) для u и v.

1) Рассмотрим сначала простейший пример такого преобразования, а именно преобразование, определяемое уравнениями

$$u = x', \quad v = y'; \qquad (3)$$

это преобразование просто относит каждой точке x', y' плоскости E' прямую

$$x'x + y'y = 1 \qquad (3a)$$

на плоскости E. Известно, что это как раз та прямая, которая является полярой точки x', y' (мы предполагаем теперь, что плоскости E, E' наложены одна на другую так, что их координатные оси совпадают) по отношению к окружности $x^2 + y^2 = 1$ радиуса единица с центром в начале координат [114]); наше преобразование является, следовательно, известным полярным соответствием по отношению к окружности (рис. 78).

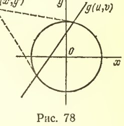


Рис. 78

Мы замечаем, что для определения этого соответствия достаточно вместо обоих уравнений (3) взять одно лишь уравнение (3а), ибо это последнее представляет собой уравнение прямой, соответствующей произвольно взятой точке x', y'. Поскольку уравнение (3а) совершенно симметрично относительно x, y, с одной стороны, и x', y' — с другой, то обе плоскости E, E' должны по отношению к нашему преобразованию играть одинаковую роль, т. е. каждой точке на плоскости E тоже должна соответствовать некоторая прямая на плоскости E', и в случае взаимного наложения этих плоскостей одной и той же точке должна соответствовать одна и та же прямая независимо от того, считаем ли эту точку принадлежащей плоскости E или E'. Ввиду первого свойства это преобразование в более узком смысле называют двойственным или дуальным, ввиду же второго — взаимным. Можно, следовательно, не различая обеих плоскостей, просто говорить о сопоставлении со всяким полюсом определенной поляры и выразить тогда свойство взаимности уже указанным раньше (с. 90) образом.

По поводу дальнейших свойств этого преобразования замечу, что с кривой, пробегаемой на плоскости E' точкой x', y', мы будем сопоставлять, согласно принципу двойственности, как соответствующий образ кривую на плоскости E, огибающую соответствующие прямые u, v.

2) Совершенно аналогично нашим прежним разъяснением о наиболее общих «коллинеациях» можно легко доказать, что самое общее двойственное соот-

ветствие получается, если, обобщая уравнения (3), положить u, v равными общим дробно-линейным функциям от x', y' с одинаковым знаменателем:

$$u = \frac{a_1x' + b_1y' + c_1}{a_3x' + b_3y' + c_3}, \qquad v = \frac{a_2x' + b_2y' + c_2}{a_3x' + b_3y' + c_3}. \quad (4)$$

Вводя эти выражения для u и v в уравнение (1) и умножая обе его части на общий знаменатель, получаем, в силу произвольности девяти коэффициентов $a_1, \ldots, c_3$ наиболее общее уравнение

$$a_1xx' + b_1xy' + c_1x + a_2yx' + b_2yy' + c_2y - a_3x' - b_3y' - c_3 = 0, \quad (4a)$$

линейное как относительно x, y, так и относительно x', y'.

Но и, обратно, каждое такое уравнение, «билинейное» относительно x, y и x', y', представляет собой некоторое двойственное соответствие между плоскостями E, E', ибо, коль скоро одна из этих пар координат фиксирована, т. е. коль скоро рассматривается фиксированная точка на одной из плоскостей, левая часть указанного уравнения является линейной функцией остальных двух координат, так что уравнение изображает некоторую прямую на другой плоскости, сопряженную с этой фиксированной точкой в первой плоскости.

3) Но это соответствие в общем случае не является уже взаимным в определенном выше смысле, а именно, взаимным оно будет только в том случае, если в уравнениях (4а) каждые два симметричных члена имеют одинаковые коэффициенты, т. е. если это уравнение имеет вид

$$Axx' + B(xy' + yx') + Cyy' + D(x + x') + E(y + y') + F = 0. \quad (5)$$

Определенное таким образом преобразование опять-таки хорошо известно из учения о конических сечениях; оно выражает соответствие между полюсом и полярою по отношению к коническому сечению

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Всякое такое полярное соответствие является двойственным и взаимным.

Вслед за изложенным можно непосредственно перейти к рассмотрению одного существенно более общего класса преобразований с переменой элемента пространства, а именно, класса преобразований касания, или «касательных» преобразований.

2. Касательные преобразования

Эти преобразования, названные так Софусом Ли, получаются, если вместо билинейного уравнения (4а) положить в основу какое-либо уравнение более высокой степени относительно четырех точек на обеих плоскостях:

$$\Omega(x,\ y;\ x',\ y') = 0,$$

удовлетворяющее, конечно, необходимым условием непрерывности; это уравнение называют, согласно Плюккеру, направляющим уравнением. Для плоскости все относящееся сюда имеется уже в упомянутом выше произведении Плюккера (с. 259—265). Если фиксировать сначала x, y, т. е. рассматривать определенную точку $P(x, y)$ на плоскости E (рис. 79), то

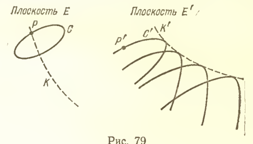


Рис. 79

уравнение $\Omega = 0$, рассматриваемое как уравнение для текущих координат x', y', изображает некоторую определенную кривую C' на плоскости E'; эту кривую мы ставим в соответствие точке P как новый элемент плоскости E' (прежде таким элементом была прямая). Если же теперь фиксировать какую-нибудь точку $P'(x', y')$ на плоскости E', например какую-нибудь точку кривой C', то это же уравнение $\Omega = 0$, в котором мы теперь придаем постоянные значения второй паре переменных x', y', а x, y считаем текущими координатами, определяет некоторую кривую C

на E, и эта кривая должна, конечно, пройти через первоначальную точку P. Этим мы устанавливаем соответствие между точками P плоскости E и ∞^2 (двукратной бесконечностью) кривых на плоскости E', а также соответствие между точками P' на плоскости E' и ∞^2 кривых C на плоскости E совершенно аналогично прежнему соответствию между точками и прямыми.

Если теперь точка P будет двигаться по плоскости E, описывая произвольную (обозначенную на рис. 79 пунктиром) кривую K, то каждому отдельному положению точки P будет соответствовать определенная кривая C' на плоскости E'. Но, чтобы из этого однократно бесконечного семейства кривых C' получить на E' только одну определенную кривую, которую мы будем считать соответствующей кривой K на E, мы перенесем на рассматриваемый здесь случай общий «принцип огибающей», уже примененный нами при двойственном соответствии: кривой K мы относим ту кривую K' на плоскости E', которая огибает все кривые C', соответствующие на основании уравнения $\Omega = 0$ отдельным точкам кривой K. Таким образом, мы действительно получили из направляющего уравнения $\Omega = 0$ такое соответствие между плоскостями, при котором каждой кривой одной плоскости соответствует определенная кривая другой, ибо можно провести такие же точно рассуждения, исходя, наоборот, из произвольной кривой K' на плоскости E'.

Чтобы представить эти рассуждения в аналитической форме, заменим мысленно кривую K многоугольником с очень маленькими прямолинейными сторонами — как это для наглядности охотно делают в дифференциальном исчислении — и спросим себя, что будет соответствовать одной отдельно взятой стороне многоугольника. При этом, конечно, следует всегда иметь в виду предельный переход к кривой, так что в пределе под стороной многоугольника следует понимать не что иное, как совокупность точки P и направления касательной к кривой K в этой точке — так называемый линейный элемент.

Сдвинемся в этом направлении от точки P, в результате чего получим некоторую точку P_1 (рис. 80) с координатами $x + dx$, $y + dy$, где dx, dy произ-

вольно малы и в пределе стремятся к нулю, а $\frac{dy}{dx}$ все время имеет определенное значение p, характеризующее заданное направление. Точке P соответствует на плоскости E' кривая C', уравнение которой относительно текущих координат x, y' имеет вид

$$\Omega(x,\ y;\ x',\ y')=0,$$

а точке P_1 — кривая C_1' с уравнением

$$\Omega(x+dx,\ y+dy;\ x',\ y')=0.$$

Рис. 80

Разлагая левую часть последнего уравнения по степеням dx и dy и принимая во внимание ввиду окончательного предельного перехода только линейные члены, получаем для C_1' уравнение

$$\Omega(x,\ y;\ x',\ y')+\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx+\frac{\partial\Omega}{\partial y}dy=0.$$

Из обоих этих уравнений (для C' и C_1') получаются координаты x', y' точки пересечения P' кривых C' и C_1', которая в пределе обращается в точку касания кривой C' с огибающей K'; эти уравнения, поскольку $\frac{dy}{dx}=p$, можно также заменить уравнениями

$$\Omega(x,\ y;\ x',\ y')=0,\quad \frac{\partial\Omega}{\partial x}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}p=0. \qquad (2)$$

Но кривые C' и C_1' имеют в точке P' в пределе общее направление касательной $p'=\frac{dy'}{dx'}$, которое одновременно является также и направлением огибающей K' в точке P'. Поскольку же $\Omega=0$ является уравнением кривой C' с текущими координатами x', y', то это направление касательной определяется из уравнения

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x'}dx'+\frac{\partial\Omega}{\partial y'}dy'=0,$$

или

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x'}+\frac{\partial\Omega}{\partial y'}p=0. \qquad (3)$$

Если, следовательно, из всей кривой K известна одна только ее точка P и направление p касательной в ней, то этим самым определена точка P' соответствующей кривой K' вместе с направлением последней в этой точке. Говорят поэтому, что наше преобразование относит в силу уравнений (2), (3) каждому линейному элементу x, y, p кривой на плоскости E определенный линейный элемент x', y', p' на плоскости E'.

Применяя это рассуждение к каждой стороне аппроксимирующего кривую многоугольника и соответственно к каждому ее линейному элементу, получим на плоскости E' стороны многоугольника, аппроксимирующего соответствующую кривую K' и соответственно линейные элементы этой кривой. Поэтому уравнения (2), решенные относительно x', y', представляют аналитически кривую K', если только x, y, p пробегают значения координат и направления касательной во всех точках кривой K (рис. 81).

Рис. 81

Теперь становится также ясным, почему Ли назвал эти преобразования «касательными». А именно, если две кривые на плоскости E касаются одна другой, то это означает не что иное, как то, что они имеют общий линейный элемент; но тогда и соответствующие им кривые на плоскости E' также должны иметь общий линейный элемент, т. е. общую точку с общим направлением в ней. Касание двух кривых является, следовательно, свойством, инвариантным при этом преобразовании, на что и должно указывать его название. Ли развил учение об этих касательных преобразованиях существенно дальше, обобщив его для случая пространства; он предпринял в 1896 г. совместно с Шефферсом систематическое изложение этого учения в «Геометрии касательных преобразований» *), но, к сожале-

*) Lie S., Scheffers G. Geometrie der Berührungstransformationen, — Bd. 1. — Leipzig, 1896.

нию, подвинулся ненамного дальше первого тома *).

После этого краткого изложения теории преобразований с заменой пространственного элемента я хочу оживить эту теорию хотя бы несколькими наглядными примерами, чтобы показать, какое значение эти вещи могут иметь в прикладных науках.

3. Некоторые примеры

Вид алгебраических кривых определенного порядка или класса. Разрешите мне сначала сказать несколько слов о двойственных преобразованиях и о той роли, которую они играют в учении о форме алгебраических кривых. Присмотримся, как изменяются типичные формы кривых при двойственных преобразованиях, например, при взаимном полярном соответствии относительно какого-нибудь конического сечения; при этом нам придется, конечно, ограничиться очень немногими характерными случаями. Так, в случае кривых третьего порядка, я отмечаю сперва нечетный тип кривой, характеризуемый тем, что со всякой прямой кривая пересекается в одной или в трех точках.

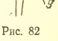


Рис. 82

На приведенном эскизном наброске (рис. 82) кривая имеет одну асимптоту, но из нее можно сразу получить кривую с тремя асимптотами, проективно преобразовав плоскость чертежа таким образом, чтобы какая-нибудь прямая, пересекающая нашу кривую трижды, перешла в бесконечно удаленную прямую. В рассматриваемом случае кривая имеет три действительных точки перегиба, которые имеют особое свойство — лежать на одной прямой g.

При дуализировании (двойственном преобразовании) этой кривой получается кривая третьего класса, к которой из каждой точки можно провести одну или три действительные касательные. Точке перегиба

*) Первые три главы второго тома были напечатаны уже после смерти Ли в 1904 г.

соответствует при этом острие, что, конечно, следует себе уяснить обстоятельным размышлением; вы можете, между прочим, найти подробное развитие этих идей в моих прежних лекциях по геометрии. Возникающая при этом кривая третьего класса (рис. 83) имеет, следовательно, в целом три острия, а касательные в них должны проходить через одну и ту же точку P', которая дуально соответствует прямой g, содержащей наши три точки перегиба.

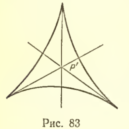
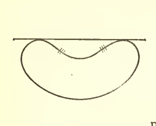


Рис. 83

Аналогичные краткие замечания я сделаю еще о кривой четвертого порядка и четвертого класса. Кривая четвертого порядка может иметь форму овала с одной впадиной; могут даже встретиться кривые с двумя, тремя и четырьмя впадинами (рис. 84).



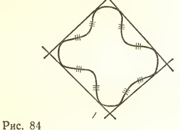
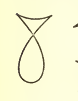


Рис. 84

В первом случае имеются две действительные точки перегиба и одна действительная двойная касательная, а в остальных — до восьми точек перегиба и до четырех двойных касательных. Дуализируя, мы должны к уже сказанному раньше прибавить еще то соображение, что двойной касательной взаимно соответствует двойная точка. Таким путем получаются типы кривых четвертого класса, имеющие от двух до восьми остриев и от одной до четырех двойных точек, как эскизно показано на рис. 85.



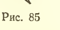


Рис. 85

Более детальное изучение различных форм алгебраических кривых представляет своеобразную прелесть, но я не могу, к сожалению, останавливаться на этом подробнее и должен удовлетвориться этими краткими указаниями. Они, однако, достаточно ясно показывают, как наши двойственные преобразования подводят под один и тот же закон вещи, которые для наивного представления настолько различны, насколько это только возможно.

Применение касательных преобразований к теории зубчатых колес. Теперь я перейду к применениям теории касательных преобразований; здесь интересным образом обнаруживается, что идея касательного преобразования, как и большинство идей, действительно удачных в теоретическом отношении, находит себе на практике широкое поле применений и что ее там действительно применяли еще задолго до ее теоретической разработки. Я имею здесь в виду главным образом старое учение о зубчатых колесах. Оно образует специальную главу кинематики — общего учения о подвижных механизмах, которое, например, для техники машиностроения имеет центральное значение. К этой же области кинематики принадлежат и те прямила, один пример которых мы недавно имели. К кинематике относится и многое из того, о чем я уже не раз должен был говорить в этом курсе: я могу здесь, конечно, выхватывать только небольшие части из каждой отдельной дисциплины и на простых примерах по возможности более наглядно выяснять их смысл и значение. Разобраться же в подробностях после этих набросков вы должны стараться сами, пользуясь специальными курсами.

Задача конструкций из зубчатых колес заключается в переносе равномерного движения с одного колеса на другое. Поскольку же при этом должны быть перенесены также и силы, то недостаточно заставить катиться одно колесо по другому (рис. 86), а необходимо еще снабдить одно колесо выступами, зубцами, которые входили бы в выемки другого. Поэтому задача заключается в придании профилям или образующим этих зубцов такой формы, чтобы равномерное вращение одного колеса вызывало тоже равномерное вращение другого. Такая постановка вопроса представляется, конечно, и в геометрическом

отношении очень интересной. Я сразу же сообщу важнейшую часть решения этой проблемы. А именно, зубцы одного колеса могут быть выбраны, по существу, произвольным образом с такими самоочевидными и обусловленными практической применимостью ограничениями, как, например, то, что отдельные зубцы не должны сталкиваться друг с другом и т. п.; зубцы же второго колеса оказываются

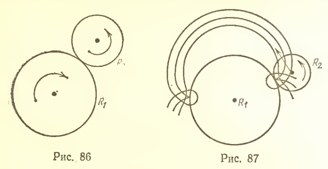


Рис. 86 Рис. 87

тогда вполне определенными, а именно, они получаются из зубцов первого колеса посредством некоторого раз навсегда устанавливаемого касательного преобразования.

Здесь будет достаточно дать краткое пояснение хода мыслей, приведшего к этой теореме, не останавливаясь на полном ее доказательстве. Непосредственно видно, что все зависит только от относительного движения обоих колес. Можно поэтому считать, например, что первое колесо R_1 совершенно неподвижно, а второе R_2, кроме своего вращательного движения, кружит еще вокруг R_1. При этом каждая точка, неподвижно соединенная с R_2, описывает в неподвижной плоскости колеса R_1 некоторую эпициклоиду (рис. 87), причем эта последняя либо будет вытянутой, либо будет иметь острия, либо делать петли в зависимости от того, лежит ли рассматриваемая точка внутри, на или вне периферии колеса R_2. Таким образом, каждой точке подвижной плоскости колеса R_2 соответствует определенная кривая на неподвижной плоскости колеса R_1; если к уравнению, осуществляющему это соответствие, подыскать по вышеуказанному способу касательное преобразование, то

как раз и получается то характерное для зубчатых колес касательное преобразование, которое мы имели в виду. А именно, легко убедиться в том, что две кривые, соответствующие друг другу в силу такого преобразования касания, действительно катятся одна по другой во время относительного движения колес.

Наконец, еще несколько слов о том, какой вид принимает намеченный здесь теоретический принцип при практическом конструировании зубчатых колес. Я приведу только простейший случай так называемого цевочного или прямобочного зацепления. Здесь зубцы колеса R_2 являются просто точками (рис. 88)

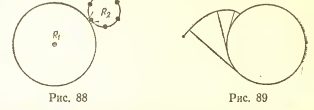


Рис. 88 Рис. 89

или, вернее, так как точки не дали бы никакой передачи сил, маленькими круглыми цапфами или шипами, так называемыми цевками. Каждому такому маленькому кругу соответствует при касательном преобразовании некоторая кривая, которая очень мало отличается от эпициклоиды, а именно, является кривой, параллельной к ней и отстоящей от нее на расстоянии, равном радиусу цевки. По этим кривым и катятся наши кружки при вращении колеса R_2; эти кривые, следовательно, образуют фланки тех зубцов, которые должны быть насажены на R_1, чтобы за них зацеплялись круглые зубцы, цевки, колеса R_2.

Имеются еще два зацепления, которые также очень часто применяются на практике, а именно, эвольвентное и циклоидное зацепления. У первого из них — я буду здесь очень краток — профили зубцов обоих колес состоят из эвольвент (развертывающих) окружности (рис. 89), т. е. из кривых, которые образуются при разматывании с круга натянутой нити и эволюты которых являются, следовательно, окружностями; у второй же модели эти профили состоят из дуг циклоид.

Я надеюсь, что этим я дал вам по крайней мере первоначальную ориентировку относительно тех проблем, о которых идет речь в учении о преобразованиях с переменой элемента пространства; теперь же, перед тем как совсем оставить этот второй раздел, трактующий вообще о преобразованиях, мне остается остановиться еще в виде приложения на одной важной главе, которая не должна отсутствовать в энциклопедии геометрии, а именно, на пользовании мнимыми элементами.

V. ТЕОРИЯ МНИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Учение о мнимом, как известно, получило свое развитие прежде всего в алгебре и анализе, в особенности в учении об уравнениях и в теории функций комплексной переменной, где оно отпраздновало свои величайшие триумфы. Но вскоре и в аналитической геометрии начали придавать переменным x, y комплексные значения $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ и присоединили, таким образом, к действительным точкам широкий класс комплексных точек, не связывая сперва эту терминологию, взятую из анализа, с каким-либо геометрическим содержанием в собственном смысле слова [115].

Польза таких нововведений, конечно, заключается в том, что они делают излишним то различение отдельных случаев, которое становится необходимым, если ограничиться действительными значениями переменных, и дают возможность высказывать общие теоремы, не допускающие никаких исключений. Совершенно аналогичные соображения привели нас уже в проективной геометрии к введению бесконечно удаленных точек, а также заполняемых ими бесконечно удаленных плоскости и прямых. И в первом, и во втором случаях мы делаем то, что довольно удачно называют «присоединением несобственных точек» к собственным, наглядно воспринимаемым точкам пространства.

Мы выполним теперь оба присоединения одновременно. Для этого введем, как и раньше, однородные координаты, следовательно, положим, чтобы оставаться пока что в пределах плоскости, $x : y : 1 = \xi : \eta : \tau$ и будем допускать для ξ, η, τ также и

комплексные значения. Систему же значений 0, 0, 0 мы исключаем.

Рассматривая при этих условиях, например, однородное квадратное уравнение

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\tau + 2E\eta\tau + F\tau^2 = 0, \qquad (1)$$

мы назовем совокупность всех как действительных, так и комплексных систем значений ξ, η, τ, ему удовлетворяющих (независимо от того, представляют ли они конечные или бесконечно удаленные точки), кривой второго порядка. Очень часто такую совокупность называют просто коническим сечением, но это название может вызвать недоразумения, если не у людей, знающих предмет, то у многих, не привыкших к применению мнимых элементов; ведь определенная таким образом кривая может, например, не иметь ни одной действительной точки.

Рассмотрим комбинацию уравнения (1) с линейным уравнением

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\tau = 0, \qquad (2)$$

которое будем считать определением кривой первого порядка, т. е. прямой линии. Эти два уравнения имеют ровно два общих решения в виде троек $\xi : \eta : \tau$, т. е. всякая кривая первого порядка и всякая кривая второго порядка всегда «пересекаются» ровно в двух точках, которые могут, конечно, быть действительными или комплексными, конечными или бесконечно удаленными, различными или совпадающими. При этом, конечно, мыслимы вырождающиеся случаи, которые приводят к исключениям из этой теоремы. Если левая часть уравнения (1) распадается на два линейных множителя и если один из них идентичен с левой частью уравнения (2), иными словами, если кривая второго порядка является «парой прямых», одна из которых совпадает с прямой (2), то каждая точка этой последней будет общей точкой (обоих образов). Это сводится к тому, что обращаются в нуль все коэффициенты того квадратного уравнения, которое получается при исключении одной неизвестной из обоих заданных уравнений. Еще более широкие вырождения получаются, конечно, в том случае, если левая часть одного или даже обоих уравнений сама

тождественно обращается в нуль:

$$A = B = \ldots = F = 0$$

или

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

В дальнейшем, однако, я оставлю в стороне все эти и подобные им особенности, которые по существу являются тривиальными. При таком условии мы имеем право переходя, например, к рассмотрению двух кривых второго порядка, высказать теорему о том, что они всегда имеют ровно четыре общие точки.

Мнимые циклические точки и мнимая окружность сфер. Введем теперь в пространстве однородные координаты $x:y:z:1 = \xi:\eta:\zeta:\tau$ и будем им придавать произвольные комплексные значения, выключая снова систему $0:0:0:0$. Совокупность решений одного линейного или соответственно квадратного однородного уравнения относительно этих четырех переменных назовем тогда поверхностью первого порядка (плоскостью) или соответственно поверхностью второго порядка. Тогда опять-таки, если отбросить тривиальные исключения, имеет, вообще говоря, место теорема о том, что поверхность второго порядка пересекается с плоскостью по кривой второго порядка и что две поверхности второго порядка пересекаются по пространственной кривой четвертого порядка, которая в свою очередь имеет со всякой плоскостью четыре общих точки. При этом ничего не говорится о том, имеют ли эти кривые пересечения действительные ветви или нет, лежат ли они в конечном расстоянии или в бесконечности.

И вот уже в 1822 г. Понселе в своем упомянутом выше трактате «О проективных свойствах фигур» *) применил эти понятия к окружностям и сферам; правда, он не пользовался однородными координатами и обусловленными ими точными аналитическими формулировками, а следовал больше своему сильному чувству геометрической непрерывности. Для ознакомления с его замечательными результатами в точной форме будем исходить из уравнения окружности

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

*) См. сноску на с. 89.

которое запишем в однородных координатах:

$$(\xi - a\tau)^2 + (\eta - b\tau)^2 - r^2\tau^2 = 0.$$

Пересечение этой окружности с бесконечно удаленной прямой $\tau = 0$ определяется, следовательно, уравнениями

$$\xi^2 + \eta^2 = 0, \quad \tau = 0.$$

В этих уравнениях отсутствуют константы a, b, r, характеризующие первоначально заданную окружность. Следовательно, любая окружность пересекается с бесконечно удаленной прямой в одних и тех же двух постоянных точках

$$\xi : \eta = \pm i, \quad \tau = 0,$$

которые кратко называют (мнимыми) круговыми или циклическими точками. Совершенно таким же образом выводят, что в пространстве все сферы пересекают бесконечно удаленную плоскость по одному и тому же мнимому коническому сечению

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0, \quad \tau = 0,$$

которое называют также просто (мнимой) окружностью сфер.

Однако имеет место также и обратная теорема: всякая кривая второго порядка, проходящая через обе циклические точки бесконечно удаленной прямой в ее плоскости, есть окружность, и всякая поверхность второго порядка, пересекающая бесконечно удаленную плоскость по мнимой окружности сфер, есть сфера, так что здесь мы имеем дело с характеристическими свойствами окружности и сферы.

Я намеренно не сказал: «бесконечно удаленные» циклические точки и «бесконечно удаленная» мнимая окружность, как это часто делают. А именно, расстояние от циклических точек до начала координат не является определенно бесконечным, как это могло бы казаться на первый взгляд, но имеет форму $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\tau} = \frac{0}{0}$ и в силу этого оказывается неопределенным; меняя характер предельного перехода к циклическим точкам, этому расстоянию можно придать произвольное (наперед заданное) значение.

Точно так же является неопределенным расстояние от циклических точек и до всякой (другой) конечной точки; то же самое имеет место для расстояния от любой точки мнимой окружности сфер (принадлежащей бесконечно удаленной плоскости) до любой конечной точки пространства. Этому нисколько не приходится удивляться, ибо мы ведь одновременно требовали от циклических точек, чтобы они находились на расстоянии r от некоторой конечной точки (лежали на круге радиуса r с центром в этой точке, где r может принимать произвольно заданное значение) и были также бесконечно удалены от этой последней; это кажущееся противоречие наша аналитическая формула может уничтожить лишь тем, что она приводит к полученной выше неопределенности. Эти простые вещи следует себе раз навсегда вполне уяснить, тем более, что о них часто говорят и пишут много неправильного.

Циклические точки и окружность сфер дают возможность в очень красивой форме включить теорию окружностей и сфер в общую теорию геометрических образов второго порядка, тогда как при элементарном изложении получается ряд кажущихся расхождений. Так, в элементарной аналитической геометрии всегда говорят только о двух точках пересечения двух окружностей, так как исключение одного неизвестного из их уравнений приводит лишь к квадратному уравнению. С нашей же точки зрения, всякие две окружности имеют общими еще и лежащие на бесконечно удаленной прямой обе циклические точки, которых не принимает во внимание элементарное изложение; таким образом мы действительно приходим к четырем точкам пересечения, требуемым упомянутой общей теоремой о двух кривых второго порядка.

Совершенно аналогично этому всегда говорят в первую очередь только об одной окружности, по которой пересекаются две сферы и которая может быть как действительной, так и мнимой; теперь, однако, мы знаем, что в бесконечно удаленной плоскости все сферы имеют, кроме того, общую мнимую окружность и что она дополняет первую конечную окружность до той пространственной кривой четвертого порядка, каковой должна быть линия пересечения согласно нашей общей теореме.

Мнимое преобразование. В дополнение к этому я хотел бы еще сказать несколько слов о так называемом мнимом преобразовании. Под этим названием понимают коллинеации с мнимыми коэффициентами, которые переводят преимущественно интересующие нас мнимые точки в действительные точки. Так, здесь в теории циклических точек применяют с большой пользой преобразование

$$\xi' = \xi, \quad \eta' = i\eta, \quad \tau' = \tau,$$

ибо оно переводит уравнение $\xi^2 + \eta^2 = 0$ в уравнение $\xi'^2 - \eta'^2 = 0$, а потому циклические точки $\xi' : \eta' = \pm i$, $\tau = 0$ превращаются в действительные бесконечно удаленные точки

$$\xi' : \eta' = \pm 1, \quad \tau = 0;$$

это — бесконечно удаленные точки обоих направлений, наклоненных к осям под углами 45°. Все окружности переходят, следовательно, в конические сечения, проходящие через обе эти действительные бесконечно удаленные точки, а это просто всевозможные равносторонние гиперболы, асимптоты которых образуют с осями упомянутые углы $\pm 45°$ (рис. 90). Пользуясь образом этих гипербол, можно себе наглядно уяснить все теоремы об окружностях, что является чрезвычайно удобным и полезным для многих целей [116]), в особенности также и для аналогичных рассуждений в пространстве. В рамках этого курса мне приходится, однако, ограничиться сделанными замечаниями; более подробное развитие этих идей дают обыкновенно в курсах и книгах по проективной геометрии.

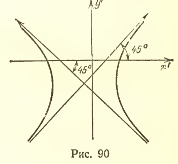


Рис. 90

Возникает вопрос, нельзя ли подойти к этим мнимым точкам, плоскостям, коническим сечениям и т. д. также с чисто геометрической точки зрения, не «выуживая» их насильно — как это мы делали до сих пор — из формул анализа. Более старые геометры —

Понселе, а также Штейнер — не достигли в этом отношении еще ясности; для Штейнера мнимые величины в геометрии все еще являются «привидениями», которые, находясь как бы в высшем мире, обнаруживают себя своими действиями, но о сущности которых мы не можем получить ясного представления. Впервые Штаудт в своих уже названных раньше сочинениях «Геометрия положения» *) (Нюрнберг, 1846) и «Добавления к геометрии» (Нюрнберг, 1856—1860) полностью разрешил этот вопрос, и его идеями нам следует еще немного заняться. Впрочем, эти книги Штаудта читаются очень трудно, ибо он развивает свои теории дедуктивным путем сразу в их окончательной форме, не ссылаясь на аналитические формулы и не делая индуктивных указаний.

Удобным же для понимания является всегда лишь генетическое изложение, которое следует пути, пройденному предположительно автором при возникновении его идей.

Двум работам Штаудта соответствуют две различные стадии в развитии его теории, к краткому изложению которых я теперь перейду. В работе 1846 г. речь сперва идет только о произвольных образах второго порядка с действительными коэффициентами; я говорю «образах», так как не хочу фиксировать числа их измерений (прямая, плоскость или пространство). Рассмотрим, например, кривую второго порядка на плоскости, т. е. какое-нибудь квадратное уравнение с действительными коэффициентами, однородное относительно трех переменных,

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\tau + 2E\eta\tau + F\tau^2 = 0.$$

Для аналитического исследования является в таком случае совершенно безразличным, имеет ли вообще это уравнение действительные решения или нет, т. е. имеет ли кривая второго порядка действительную ветвь или же состоит из одних только мнимых точек. Вопрос заключается в том, какие именно наглядные представления чистый геометр должен связывать с подобной кривой в этом последнем случае, как он должен определить такую кривую геометрическими средствами. Тот же вопрос возникает и в

*) См. сноску на с. 89.

одномерной области, когда речь идет о пересечении кривой с какой-нибудь прямой, например с осью x, определяемой уравнением $\eta = 0$; тогда точки пересечения — безразлично, будут ли они действительными или мнимыми, — получаются из уравнения с действительными коэффициентами

$$A\xi^2 + 2D\xi\tau + F\tau^2 = 0$$

и вопрос заключается в том, можно ли со случаем комплексных корней связать какое-нибудь геометрическое содержание.

Интерпретация по Штаудту самосопряженных мнимых образов. Идея Штаудта заключается прежде всего в следующем. Он рассматривает вместо кривой второго порядка соответствующую ей полярную систему, о которой мы уже говорили выше (с. 170), т. е. взаимно двойственное соответствие, изображаемое уравнением

$$A\xi\xi' + B(\xi\eta' + \xi'\eta) + C\eta\eta' + D(\xi\tau' + \xi'\tau) + \\ + E(\eta\tau' + \eta'\tau) + F\tau\tau' = 0.$$

В силу действительности коэффициентов оно представляет собой исключительно действительное соотношение, относящее каждой действительной точке некоторую действительную прямую независимо от того, будет ли сама кривая действительной или нет. Но полярная система со своей стороны вполне определяет кривую как совокупность точек, лежащих на своих собственных полярах, причем каждый раз остается открытым вопрос о том, существуют ли такие точки в действительной области. Во всяком случае полярная система всегда является действительным представителем определяемой уравнением кривой второго порядка, и оказывается целесообразным поставить этого представителя во главу исследования вместо заданной нам кривой.

Пересекая нашу кривую осью x, т. е. полагая η и η' равными нулю, совершенно аналогично получаем на этой оси некоторое одномерное всегда действительное полярное соответствие, которое задается уравнением

$$A\xi\xi' + D(\xi\tau' + \xi'\tau) + F\tau\tau' = 0$$

и всегда приводит во взаимное соответствие по две действительные точки. Точками пересечения оси x с кривой являются обе точки, соответствующие каждая самой себе [117]) в этом полярном соответствии, его так называемые основные точки.

Они могут быть действительными или мнимыми, но во всяком случае вопрос о них представляет лишь второстепенный интерес, а на первый план выдвигается опять-таки полярное соответствие, как всегда, являющееся действительным представителем этих точек.

Каждые две точки $\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\xi'}{\tau'}\right)$, взаимно сопряженные в одномерном полярном соответствии, называют парой точек «инволюции» — выражение, введенное в XVII в. Дезаргом; при этом различают два главных типа таких инволюций в соответствии с тем, являются ли основные точки действительными или мнимыми, и промежуточный случай, в котором они совпадают. Но для нас здесь главным является само понятие инволюции; различение же отдельных случаев, т. е. вопрос о природе корней квадратного уравнения, имеет лишь второстепенный интерес.

Хотя эти рассуждения, которые могут быть, конечно, непосредственно перенесены на три измерения, и не дают еще истолкования мнимых элементов, но зато — это касается образов второго порядка — установлена общая точка зрения, стоящая выше разделения на действительные и мнимые элементы. Каждый образ второго порядка изображается некоторой действительной полярной системой, и с этими полярными системами можно оперировать геометрически точно так же, как аналитически — с действительными уравнениями этих образов.

Поясним это на примере.

Пусть дана некоторая кривая второго порядка, т. е. в силу предыдущего некоторая полярная система на плоскости; присоединим к ней еще одну какую-нибудь прямую. Здесь непосредственная интуиция подсказывает нам возможность очень многих различных случаев в зависимости от того, имеет ли вообще кривая действительные точки или нет и пересекается ли она в первом случае с прямою в действительных точках или нет. Но во всяком случае наша

плоская полярная система определяет на прямой g (рис. 91) некоторую линейную полярную систему, т. е. некоторую инволюцию: каждой точке P прямой g соответствует поляра p', а эта последняя пересекается с g в некоторой точке P'; точки (P, P') и пробегают ту инволюцию, о которой идет речь. Дополнительно можно поставить вопрос об основных точках этой инволюции, о том, будут ли

Рис. 91

Рис. 92

они действительными или мнимыми. Этим мы выразили в геометрических терминах как раз то, к чему мы пришли в начале наших разъяснений, исходя из уравнений.

Применим теперь эти рассуждения, в частности, к мнимым циклическим точкам и к окружности сфер. Выше мы сказали, что две произвольные окружности пересекают бесконечно удаленную прямую в одних и тех же двух точках, а именно, в циклических точках; геометрически это будет теперь означать, что полярные системы этих окружностей образуют на бесконечно удаленной прямой одну и ту же одномерную полярную систему, т. е. приводят к одной и той же инволюции. В самом деле, если проведем (ср. с. 90) касательные к какой-нибудь окружности из бесконечно удаленной точки P, то поляра p_1' этой последней, будучи линией соединения точек касания касательных, исходящих из P, оказывается перпендикулярной их общему направлению (рис. 92). А так как все прямые, проходящие через одну и ту же бесконечно удаленную точку, параллельны между собой, то и поляра p_2' той же точки P, взятая по отношению к какой-нибудь другой окружности, будет перпендикулярна тому же самому направлению, что и p_1',

а значит, параллельна прямой p_1'; другими словами, p_1' и p_2' в свою очередь пересекают бесконечно удаленную прямую в одной и той же точке P'. Итак, полярные системы всех окружностей образуют в пересечении с бесконечно удаленной прямой — таков наш результат — одну у ту же полярную систему, так называемую «абсолютную инволюцию», причем точки каждой пары этой последней, рассматриваемые из любой конечной точки, всякий раз видны в двух взаимно перпендикулярных направлениях[118]).

Переведем эти рассуждения на язык анализа. Исходя из однородного уравнения окружности

$$(\xi - a\tau)^2 + (\eta - b\tau)^2 - r^2\tau^2 = 0,$$

или

$$\xi^2 + \eta^2 - 2a\xi\tau - 2b\eta\tau + (a^2 + b^2 - r^2)\tau^2 = 0,$$

получаем соответствующее полярное соответствие

$$\xi\xi' + \eta\eta' - a(\xi\tau' + \xi'\tau) - b(\eta\tau' + \eta'\tau) + \\ + (a^2 + b^2 - r^2)\tau\tau' = 0;$$

отсюда мы получим соответствие, устанавливаемое на бесконечно удаленной прямой, если примем $\tau = \tau' = 0$:

$$\xi\xi' + \eta\eta' = 0, \quad \tau = 0, \quad \tau' = 0.$$

Эти уравнения действительно не зависят от констант a, b, r, характеризующих исходную окружность. К тому же, как учит аналитическая геометрия, две прямые, идущие к точкам ξ, η, 0 и ξ', η', 0, оказываются в силу первого из этих уравнений взаимно перпендикулярными, так что мы действительно снова приходим к высказанной выше теореме.

Совершенно аналогичные соотношения имеют место для сфер в пространстве. Все они создают на бесконечно удаленной плоскости одно и то же так называемое абсолютное полярное соответствие, задаваемое уравнениями

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0, \quad \tau = 0, \quad \tau' = 0,$$

а так как из первого из этих уравнений следует, что направления $\xi : \eta : \zeta$ и $\xi' : \eta' : \zeta'$ взаимно перпендикулярны, то каждой бесконечно удаленной точке P соответствует при этом та бесконечно удаленная пря-

мая, которая высекается (на бесконечно удаленной плоскости) плоскостью, перпендикулярной идущему к P направлению. Это дает нам действительный геометрический эквивалент теорем о мнимой окружности в бесконечности.

Полная интерпретация по Штаудту отдельных мнимых элементов. Можно, конечно, сказать, что эти рассуждения представляют собой скорее обход мнимого в геометрии, чем его истолкование. Действительную же интерпретацию отдельных мнимых точек, прямых и плоскостей Штаудт дал впервые лишь в своих «Добавлениях» 1856—1860 гг. путем дальнейшего развития изложенного выше подхода. Я хочу разъяснить вам и эту интерпретацию, так как она по сути является чрезвычайно простой и остроумной и только в абстрактном изложении Штаудта кажется крайне странной и трудной. При этом я во всем буду следовать тому ее аналитическому изложению, какое дал Штольц в 1871 г. Штольц, бывший тогда со мною вместе в Гёттингене, прочитал всего Штаудта, чего я сам никогда не мог сделать. Из бесед со Штольцем я и познакомился с различными очень интересными также и в других отношениях идеями Штаудта, над которыми я впоследствии много работал сам. В нижеследующем я снова остановлюсь только на важнейших чертах хода идей Штаудта, не приводя полностью всех деталей; при этом будет совершенно достаточно ограничиться случаем плоскости.

Начнем с предположения, что нам задана некая мнимая [119]) точка P своими тремя комплексными координатами ξ, η, τ; разлагая их на действительную и мнимую части, пишем

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2, \quad \tau = \tau_1 + i\tau_2. \qquad (1)$$

Зададимся целью построить некую действительную фигуру, которая давала бы истолкование этой точки P, причем связь этих двух образов должна быть проективной, т. е., выражаясь точнее, не должна нарушаться ни при каком действительном проективном преобразовании.

1) Первый шаг в указанном направлении заключается в том, что мы фиксируем внимание на тех двух действительных точках P_1, P_2, однородными координатами которых служат действительные и

соответственно умноженные на $-i$ мнимые части (что дает коэффициенты при i) заданных координат точки P:

$$P_1 : \xi_1,\ \eta_1,\ \tau_1; \quad P_2 : \xi_2,\ \eta_2,\ \tau_2. \tag{1a}$$

Эти две точки различны, т. е. не имеют места равенства $\xi_1 : \eta_1 : \tau_1 = \xi_2 : \eta_2 : \tau_2$, ибо в противном случае ξ, η, τ относились бы друг к другу как три действительные величины и изображали бы поэтому действительную точку. Поэтому точки P_1, P_2 определяют некоторую действительную прямую g, уравнение которой имеет, как известно, вид

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \tau \\ \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \end{vmatrix} = 0; \tag{2}$$

на этой прямой лежит как заданная мнимая точка P, так и ее «комплексно сопряженная точка» $\bar{P}$ с координатами

$$\bar{\xi} = \xi_1 - i\xi_2, \quad \bar{\eta} = \eta_1 - i\eta_2, \quad \bar{\tau} = \tau_1 - i\tau_2, \tag{$\bar{1}$}$$

так как обе тройки координат (1), ($\bar{1}$) удовлетворяют, очевидно, уравнению прямой (2).

2) Конечно, построенная таким образом пара точек P_1, P_2 ни в коем случае не может служить действительным представителем мнимой точки P, ибо она весьма существенным образом зависит от самих конкретных значений ξ, η, τ, тогда как точка P характеризуется только отношениями этих чисел. Следовательно, получится та же самая точка P, если мы вместо ξ, η, τ напишем их произведения

$$\begin{aligned} \rho\xi &= \rho_1\xi_1 - \rho_2\xi_2 + i(\rho_2\xi_1 + \rho_1\xi_2), \\ \rho\eta &= \rho_1\eta_1 - \rho_2\eta_2 + i(\rho_2\eta_1 + \rho_1\eta_2), \\ \rho\tau &= \rho_1\tau_1 - \rho_2\tau_2 + i(\rho_2\tau_1 + \rho_1\tau_2) \end{aligned} \tag{3}$$

на произвольную комплексную константу:

$$\rho = \rho_1 + i\rho_2,$$

но тогда, разделяя вновь действительную и мнимую части, мы получим вместо точек P_1 и P_2 уже другие

действительные точки P_1' и P_2' с координатами:

$$P_1':\xi_1':\eta_1':\tau_1'=$$
$$=(\rho_1\xi_1-\rho_2\xi_2):(\rho_1\eta_1-\rho_2\eta_2):(\rho_1\tau_1-\rho_2\tau_2),\quad (3a)$$
$$P_2':\xi_2':\eta_2':\tau_2'=(\rho_2\xi_1+\rho_1\xi_2):(\rho_2\eta_1+\rho_1\eta_2):(\rho_2\tau_1+\rho_1\tau_2).$$

Рассматривая совокупность всех пар точек P_1', P_2', получаемых таким образом при всевозможных значениях ρ_1, ρ_2, мы приходим к некоторому геометрическому образу, для которого имеют значение только отношения $\xi:\eta:\tau$, т. е. только «геометрическая» точка P, и который поэтому вполне годится быть представителем для P. Кроме того, связь этого образа с P является в самом деле проективной, ибо при любом линейном действительном преобразовании величин ξ, η, τ их компоненты ξ_1, η_1, τ_1 и ξ_2, η_2, τ_2 подвергаются, очевидно, тому же преобразованию.

3) Чтобы теперь исследовать ближе геометрическую природу этой совокупности точечных пар, заметим прежде всего, что, каково бы ни было ρ, точки P_1', P_2' всякий раз лежат на прямой P_1P_2 (рис. 93), ибо их координаты удовлетворяют, очевидно, уравнению (2). Далее, когда ρ пробегает всевозможные комплексные значения, т. е. когда ρ_1 и ρ_2 принимают всевозможные действительные значения (причем их общий действительный множитель не имеет существенного значения), P_1' пробегает все действительные точки прямой g, а P_2' всегда представляет собой какую-то другую действительную точку той же прямой g, однозначно сопоставленную с первой; в частности, при $\rho_1=1$, $\rho_2=0$ получаются в качестве сопоставленных точек точки P_1 и P_2. Это сопоставление сделается более наглядным, если ввести отношение $\rho_2/\rho_1=-\lambda$, а именно, тогда будем иметь

Рис. 93

для P_1':

$$\xi_1':\eta_1':\tau_1'=(\xi_1+\lambda\xi_2):(\eta_1+\lambda\eta_2):(\tau_1+\lambda\tau_2),\quad (3b)$$

для P_2':

$$\xi_2':\eta_2':\tau_2'=\left(\xi_1-\frac{1}{\lambda}\xi_2\right):\left(\eta_1-\frac{1}{\lambda}\eta_2\right):\left(\tau_1-\frac{1}{\lambda}\tau_2\right).(3b)$$

4) Из этих формул можно далее легко заключить, что при переменном λ точки P_1 и P_2 как раз пробегают по всем парам точек некоторой инволюции на прямой g. В самом деле, при введении на прямой g системы координат однородные координаты каждой точки P'_1 или соответственно P'_2 оказываются, как известно, целыми линейными функциями параметра $\lambda'_1 = \lambda$ или соответственно $\lambda'_2 = -\frac{1}{\lambda}$ уравнений (3b). Поэтому уравнение $\lambda'_1\lambda'_2 = -1$, связывающее между собой оба эти параметра, устанавливает некоторое симметрическое билинейное соотношение между координатами точек P'_1 и P'_2, а этим в силу определения на с. 190 и доказывается наше утверждение.

5) Основные точки, т. е. соответствующие самим себе точки этой инволюции, получаем при $\lambda = -\frac{1}{\lambda}$, следовательно, при $\lambda = \pm i$; обе они оказываются мнимыми, а именно, одна из них совпадает с нашей исходной точкой P, а вторая является комплексно сопряженной с ней точкой $\bar{P}$. Пока что мы пришли, таким образом, всего лишь к новому изложению прежних штаудтовских идей. Наряду с точкой P мы ввели в рассмотрение точку $\bar{P}$, которая дополняет точку P до некоторого одномерного образа второго порядка, определяемого некоторым действительным квадратным уравнением, и построили в качестве действительного представителя этого образа соответственную инволюцию. Замечу еще, что такая инволюция будет вполне определена, если известны две какие-нибудь пары ее точек, например P_1, P_2 и P'_1, P'_2; для того же, чтобы основные точки этой инволюции были мнимыми, необходимо и достаточно, чтобы эти пары точек находились в «скрещенном положении» (разделяли друг друга), т. е. чтобы одна из точек P'_1, P'_2 находилась между P_1 и P_2, а вторая вне отрезка P_1P_2.

6) Для полного решения нашей задачи нам не хватает теперь еще только средства, позволяющего превратить этого общего представителя двух точек P и $\bar{P}$ в представителя одной только точки P (или только точки $\bar{P}$); Штаудт нашел такое средство лишь в 1856 г., пользуясь одной очень красивой идеей.

А именно, точка P_1' с координатами

$$(\xi_1 + \lambda\xi_2) : (\eta_1 + \lambda\eta_2) : (\tau_1 + \lambda\tau_2)$$

пробегает прямую g в одном вполне определенном направлении (или «в определенную сторону») (рис. 94), если заставить λ пробежать от нуля по всем действительным положительным значениям до $+\infty$ и затем через все отрицательные значения опять вернуться к нулю. Легко убедиться в том, что мы получили бы то же самое направление на g, если бы исходили из координат точки P, умноженных на произвольный множитель ρ, т. е. если бы рассматривали точку $\xi_1' + \lambda\xi_2'$, ..., и что, далее, при действительном проективном преобразовании точки P направление движения точки-изображения получается из только что определенного направления с помощью того же преобразования. Поэтому будет вполне согласным с нашими требованиями, если мы раз навсегда условимся сопоставлять это направление движения с первоначальной точкой P, имеющей координаты $\xi_1 + i\xi_2$, ... А так как комплексно сопряженная точка $\bar{P}$ имеет координаты $\xi_1 + i(-\xi_2)$, ..., то с нею, согласно этому условию, приходится сопоставлять то направление движения, которое имеет точка с координатами $\xi_1 + \lambda(-\xi_2)$, ... при положительно возрастающем λ (от нуля через положительные значения к $+\infty$ и затем от $-\infty$ до нуля), т. е. направление на прямой g, прямо противоположное предыдущему направлению движения, и этим достигается желательное различение. Выражаясь кратко, мы попросту вводим различение между $+i$ и $-i$ тем, что мы различаем положительный и отрицательный пробег действительных λ-значений. Вместе с тем мы получили в конце концов следующее правило для однозначного и проективно инвариантного построения действительной геометрической фигуры, представляющей мнимую точку

Рис. 94

$$(\xi_1 + i\xi_2) : (\eta_1 + i\eta_2) : (\tau_1 + i\tau_2).$$

Строим точки $P_1(\xi_1 : \eta_1 : \tau_1)$ и $P_2(\xi_2 : \eta_2 : \tau_2)$, соединяющую их прямую g и ту инволюцию точек на пря-

мой g (или соответственно еще одну пару ее точек), в которой точки

$$P_1'(\xi_1 + \lambda\xi_2) : (\eta_1 + \lambda\eta_2) : (\tau_1 + \lambda\tau_2)$$

и

$$P_2'\left(\xi_1 - \frac{1}{\lambda}\xi_2\right) : \left(\eta_1 - \frac{1}{\lambda}\eta_2\right) : \left(\tau_1 - \frac{1}{\lambda}\tau_2\right)$$

являются попарно сопряженными; наконец, присоединяем еще стрелку, указывающую направление движения точки P_1' при положительно возрастающем λ.

7) Нам осталось еще убедиться в том, что также и, обратно, каждая такая действительная фигура, состоящая из прямой, двух лежащих на ней в скрещенном положении пар точек P_1, P_2 и P_1', P_2' (или соответственно из точечной инволюции без действительных двойных точек) и стрелки, указывающей направление, представляет одну и только одну мнимую точку. В самом деле, присоединяя некоторый надлежаще выбранный действительный постоянный множитель, можно без труда — я опять-таки разрешаю себе не вдаваться здесь в подробности — придать координатам точки P_2 такие значения ξ_2, η_2, τ_2, чтобы координаты точек P_1' и P_2' находились в отношениях

$$(\xi_1 + \lambda\xi_2) : (\eta_1 + \lambda\eta_2) : (\tau_1 + \lambda\tau_2)$$

и

$$\left(\xi_1 - \frac{1}{\lambda}\xi_2\right) : \left(\eta_1 - \frac{1}{\lambda}\eta_2\right) : \left(\tau_1 - \frac{1}{\lambda}\tau_2\right)$$

или, что то же самое, чтобы двойные точки заданной инволюции имели координаты $\xi_1 \pm i\xi_2, \ldots$; знаком же параметра λ, который после этого еще остается произвольным, следует распорядиться так, чтобы направление движения точки $(\xi_1 + \lambda\xi_2) : (\eta_1 + \lambda\eta_2) : (\tau_1 + \lambda\tau_2)$ при положительно возрастающем, начиная от нуля, параметре λ соответствовало направлению, заданному стрелкой. Тогда точке P с координатами $\xi_1 + i\xi_2, \ldots$ будет соответствовать в силу предыдущих рассуждений как раз заданная инволюция с заданным направлением движения в качестве ее действительного представителя.

Далее, можно убедиться в том, что, исходя из какой-нибудь другой пары точек этой инволюции, мы придем к тем же самым отношениям координат, т. е. к той же точке P.

Решив таким образом нашу проблему для точки, мы можем (оставаясь на плоскости) сразу же перенести это решение и на случай прямой, пользуясь принципом двойственности. В результате для комплексной прямой ее однозначным представителем в действительной области является действительная точка, две пары лучей, принадлежащие пучку лучей с центром в этой точке и разделяющие одна другую (или соответственно некоторая инволюция лучей без действительных двойных лучей) и, наконец, определенное направление вращения в этом пучке (рис. 95).

Рис. 95

Эти интерпретации позволяют также — и в этом заключается их громадное значение — представлять все соотношения между комплексными элементами или между комплексными и действительными элементами при помощи наглядных свойств исключительно действительных геометрических фигур.

Взаимное расположение мнимых точек и прямых. Чтобы пояснить это на конкретном примере, покажу вам, что соответствует в этой интерпретации следующему утверждению: (действительная или мнимая) точка P лежит на (действительной или мнимой) прямой g. При этом, конечно, приходится различать такие случаи:

1) действительная точка и действительная прямая,
2) действительная точка и мнимая прямая,
3) мнимая точка и действительная прямая,
4) мнимая точка и мнимая прямая.

Случай 1) не требует от нас особых разъяснений; здесь перед нами одно из основных соотношений обычной геометрии.

В случае 2) через заданную действительную точку обязательно должна проходить наряду с заданной мнимой прямой также и комплексно сопряженная с нею прямая; следовательно, эта точка должна сов-

падать с вершиной того пучка лучей, которым мы пользуемся для изображения мнимой прямой.

Подобно этому в случае 3) действительная прямая должна быть тождественна с носителем той прямолинейной инволюции точек, которая служит представителем заданной мнимой точки.

Наиболее интересным является случай 4) (рис. 96): здесь, очевидно, комплексно сопряженная точка должна также лежать на комплексно сопряженной прямой, а отсюда следует, что каждая пара точек инволюции точек, изображающей точку P, должна находиться на некоторой паре прямых инволюции прямых, изображающей прямую g, т. е. что обе эти инволюции должны быть расположены перспективно одна относительно другой; кроме того, оказывается, что и стрелки обеих инволюций также расположены перспективно.

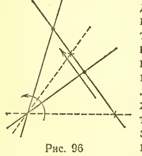


Рис. 96

Вообще, в аналитической геометрии плоскости, уделяющей внимание также и комплексной области, мы получим полную действительную картину этой плоскости, если к совокупности всех ее действительных точек и прямых присоединим в качестве новых элементов совокупность рассмотренных выше инволюционных фигур вместе со стрелками их направлений. Здесь будет достаточно, если я намечу в общих очертаниях, какой вид приняло бы при этом построение такой действительной картины комплексной геометрии. При этом я буду следовать тому порядку, в котором теперь обычно излагают первые предложения элементарной геометрии.

1) Начинают с аксиом существования, назначение которых — дать точную формулировку наличия только что упомянутых элементов в расширенной по сравнению с обычной геометрией области.

2) Затем аксиомы соединения, которые утверждают, что также и в определенной в п. 1) расширенной области через (каждые) две точки проходит одна и только одна прямая и что (всякие) две прямые имеют одну и только одну общую точку. При этом

подобно тому, что мы имели выше, приходится каждый раз различать четыре случая в зависимости от того, являются ли действительными заданные элементы, и представляется очень интересным точно продумать, какие именно действительные построения с инволюциями точек и прямых служат изображением этих комплексных соотношений.

3) Что же касается аксиом расположения (порядка), то здесь по сравнению с действительными соотношениями выступают на сцену совершенно новые обстоятельства; в частности, все действительные и комплексные точки, лежащие на одной фиксированной прямой, а также все лучи, проходящие через одну фиксированную точку, образуют двумерный континуум. Ведь каждый из нас вынес из изучения теории функций привычку изображать совокупность значений комплексной переменной всеми точками плоскости.

4) Наконец, что касается аксиом непрерывности, то я укажу здесь только, как изображаются комплексные точки, лежащие как угодно близко к какой-нибудь действительной точке. Для этого через взятую действительную точку P (или через какую-нибудь другую близкую к ней действительную точку) нужно провести какую-нибудь прямую и рассмотреть на ней такие две разделяющие одна другую (т. е. лежащие «скрещенным образом») пары точек (рис. 97), чтобы две точки P_1, P_1', взятые из разных пар, лежали близко одна к другой и к точке P; если теперь неограниченно сближать точки P_1 и P_1' то инволюция, определяемая названными парами точек, вырождается, т. е. обе ее до сих пор комплексные двойные точки совпадают с точкой $P_1 = P_1'$. Каждая из обеих мнимых точек, изображаемых этой инволюцией (вместе с той или другой стрелкой), переходит, следовательно, непрерывно в некоторую точку, близкую к точке P, или даже непосредственно в точку P. Конечно, для того чтобы быть в состоянии с пользой применять эти представления о непрерывности, необходимо детально с ними поработать.

Рис. 97

Хотя все это построение и является по сравнению с обычной действительной геометрией достаточно громоздким и утомительным, но зато оно может дать несравненно больше. В частности, оно способно поднять на уровень полной геометрической наглядности алгебраические образы, понимаемые как совокупности их действительных и комплексных элементов, и при его помощи можно наглядно уяснить себе на самих фигурах такие теоремы, как основная теорема алгебры или теорема Безу о том, что две кривые m-го и n-го порядков имеют, вообще говоря, ровно mn общих точек. Для этой цели следовало бы, конечно, осмыслить основные положения в значительно более точной и наглядной форме, чем это было сделано до сих пор; впрочем, в литературе уже имеется весь существенно необходимый для таких исследований материал.

Но в большинстве случаев применение этого геометрического толкования привело бы все же при всех его теоретических преимуществах к таким усложнениям, что приходится довольствоваться его принципиальной возможностью и возвращаться фактически к более наивной точке зрения, заключающейся в следующем: комплексная точка есть совокупность трех комплексных координат, и с нею можно оперировать точно так же, как и с действительными точками. В самом деле, такое введение мнимых элементов, воздерживающееся от каких бы то ни было принципиальных рассуждений, всегда оказывалось плодотворным в тех случаях, когда нам приходилось иметь дело с мнимыми циклическими точками или с окружностью сфер. Как уже было сказано, впервые стал пользоваться мнимыми элементами в этом смысле Понселе; его последователями в этом отношении были другие французские геометры, главным образом Шаль и Дарбу; в Германии ряд геометров, в особенности Ли, также применяли с большим успехом такое понимание мнимых элементов.

Этим отступлением в область мнимого я заканчиваю весь второй отдел моего курса и обращаюсь к новой главе.

СИСТЕМАТИКА И ОБОСНОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ

I. СИСТЕМАТИКА

Изученные нами геометрические преобразования мы прежде всего используем для установления систематического подразделения всей области геометрии, которое позволит нам обозреть с одной точки зрения как отдельные части геометрии, так и их взаимные связи.

1. Обзор классификации геометрических дисциплин

Здесь речь идет о тех идеях, которые я систематически развил в моей «Эрлангенской программе» 1872 г. *).

1) В дальнейшем, как и до сих пор, мы будем систематически пользоваться анализом при исследовании геометрических отношений, представляя себе *совокупность всех точек пространства изображенною при помощи совокупности всех числовых троек — значений трех «координат» x, y, z.* При таком изображении каждому преобразованию пространства соответствует определенное преобразование этих координат. С самого начала наше внимание особенно привлекли следующие четыре вида преобразований, изображаемых некоторыми *специальными линейными подстановками* координат x, y, z: *параллельные переносы, повороты около начала координат* O, *зеркальное отражение относительно этой же точки* O и *гомотетии с центром* O.

2) Введение координат могло бы, пожалуй, заставить думать о существовании полного тождества

*) Klein F. Verschiedene Betrachtung über neuere geometrische Forschungen. — Erlangen, 1872. [Русский перевод: Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований//Изв. физ.-мат. о-ва при Казанск. ун-те. — 1896.— Т. 5.]

между анализом трех независимых переменных x, y, z и геометрией в узком смысле слова. Но в действительности это не так. Дело в том, что геометрия занимается, как это я уже раньше имел случай отметить (см. с. 42—44), только такими соотношениями между координатами, которые остаются неизменными при перечисленных в п. 1) линейных подстановках — будем ли рассматривать последние как изменения системы координат или как преобразования пространства; *геометрия является, таким образом, теорией инвариантов упомянутых линейных подстановок*. Все же соотношения между координатами, не имеющие инвариантного характера, — как, например, утверждение о том, что некоторая точка имеет координаты 2, 5, 3, — связаны с определенной раз навсегда фиксированной системой координат, и принадлежат к науке, которая должна индивидуализировать каждую точку саму по себе и рассматривать изолированно ее свойства: *к топографии* или, если угодно, к *географии*. Для пояснения я напомню несколько примеров геометрических свойств. Так, мы говорим, что две точки имеют определенное (взаимное) *расстояние*, если только фиксирована некоторая единица (длины); с нашей теперешней точки зрения это означает, что с помощью их координат x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 можно составить выражение $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$, которое либо остается неизменным при всех указанных подстановках, либо только умножается на некоторый множитель, не зависящий от специального положения взятых точек[120]). Подобный же смысл имеют фразы: «две прямые образуют определенный *угол*», «некоторое коническое сечение имеет определенные *главные оси* и *фокусы*» и т. д.

Для совокупности этих геометрических свойств мы будем употреблять название «метрическая геометрия», чтобы сразу же отличить от нее различные другие «виды геометрий». Мы получим их, выделяя по определенному принципу известные группы теорем метрической геометрии и рассматривая их сами по себе; вследствие этого все эти новые виды геометрий являются, по крайней мере на первый взгляд, частями метрической геометрии как наиболее объемлющего «вида геометрии».

3) За исходный пункт мы берем подробно изученные раньше *аффинные преобразования*, т. е. целые линейные подстановки переменных x, y, z:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z + d_1,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2z + d_2,$$
$$z' = a_3x + b_3y + c_3z + d_3,$$

в число которых входят преобразования, рассмотренные в п. 1), как частные случаи, и выделяем из числа всех геометрических понятий и теорем более узкий круг тех понятий и теорем, которые остаются неизменными при любых аффинных преобразованиях; совокупность их мы рассматриваем как первый новый вид геометрии — как так называемую *аффинную геометрию*, или *теорию инвариантов аффинных преобразований.*

Поэтому мы можем из нашего знания аффинных преобразований тотчас же вывести понятия и теоремы этой геометрии; я упомяну здесь лишь немногое: о расстояниях и углах в аффинной геометрии не может быть более и речи; точно так же теряет смысл понятие главных осей конического сечения, исчезает различие между окружностью и эллипсом. Но зато в пространстве сохраняется различение *конечного* и *бесконечно далекого* и вообще сохраняется все, что связано с этим различением: понятие *параллелизма двух прямых*, подразделение всех конических сечений на *эллипсы*, *гиперболы*, *параболы* и т. п., далее понятия о *центре* и *диаметрах конического сечения* и, в частности, отношение *сопряженности диаметров*.

4) Далее, мы обращаемся к *проективным*, т. е. дробно-линейным, *преобразованиям*

$$x' = (a_1x + b_1y + c_1z + d_1)/(a_4x + b_4y + c_4z + d_4),$$
$$y' = (a_2x + b_2y + c_2z + d_2)/(a_4x + b_4y + c_4z + d_4),$$
$$z' = (a_3x + b_3y + c_3z + d_3)/(a_4x + b_4y + c_4z + d_4),$$

которые включают аффинные преобразования как частные случаи. Если известные геометрические свойства остаются без изменения при всех этих преобразованиях, то они должны, конечно, принадлежать также и к аффинной геометрии; этим из последней выделяется так называемая *проективная геометрия* как *теория инвариантов проективных преобразова-*

ний. Последовательное выделение аффинной и проективной геометрии из метрической можно сравнить с работой химика, который, применяя все более сильные средства разложения, выделяет из данного вещества все более ценные составные части; нашими средствами разложения являются сначала аффинные, а затем проективные преобразования.

Что же касается теорем проективной геометрии, то отметим лишь, что теперь отпадает исключительное положение бесконечного и все связанные с этим понятия аффинной геометрии. Теперь имеется только один *вид собственного* (нераспадающегося) *конического сечения*; зато сохраняется, например, *связь между полюсом и полярою* и точно так же *образование конического сечения проективными пучками лучей*, о котором мы говорили выше (с. 150—152).

Следуя тому же принципу, мы можем перейти от метрической геометрии также и к другим видам геометрий.

5) Одной из важнейших является *геометрия обратных радиусов*. Она охватывает совокупность тех свойств метрической геометрии, которые сохраняются при всех возможных *преобразованиях при помощи обратных радиусов* (с. 152); таким образом, в этой геометрии, например, понятие прямой или плоскости теряет всякое самостоятельное значение, но зато сохраняют смысл понятия *окружности* и *сферы*, по отношению к которым понятия прямой и плоскости занимают подчиненное положение в качестве частных случаев.

6) Наконец, я выделяю еще один вид геометрии, который получается как бы путем применения самой сильной протравы и охватывает поэтому наименьшее количество теорем. Это Analysis situs (топология), о котором я уже упоминал (с. 163—167). Здесь речь идет о совокупности тех свойств, которые сохраняются при всех взаимно однозначных взаимно непрерывных преобразованиях. А чтобы не предоставлять всему бесконечно удаленному, которое при определенных таким образом преобразованиях всегда переходило бы само в себя, исключительной роли, мы можем присоединить еще либо проективные преобразования, либо преобразования посредством обратных радиусов [121]).

Теория групп как основа геометрического классификационного принципа. Намеченную таким образом схему мы теперь очертим еще четче, вводя основное для нас *понятие группы*. Некоторую *совокупность* преобразований мы называем (как уже раньше было объяснено) группой в том случае, если *сложение* (т. е. композиция — результат *последовательного выполнения*) любых двух из этих преобразований в результате *снова дает некоторое преобразование, которое принадлежит той же совокупности*, и если, кроме того, преобразование, обратное по отношению к любому из этих преобразований, также принадлежит *той же совокупности*. Примером группы является совокупность *движений*, а также совокупность *коллинеаций* (проективных преобразований), ибо композиция двух движений снова есть некоторое движение, а две коллинеации равносильны некоторой одной; кроме того, в обоих случаях для каждого преобразования существует ему обратное.

Оглядываясь теперь на наши различные виды геометрий, мы видим, что преобразования, связанные с каждой из них, каждый раз образуют группу. Прежде всего, все линейные подстановки, при которых остаются без изменений соотношения *метрической геометрии* (параллельные переносы, повороты, зеркальные отражения и гомотетии), составляют группу, которой дают название *главной группы пространственных преобразований*[122]). Столь же легко можно убедиться в аналогичном значении *аффинной группы* (состоящей из всех аффинных преобразований) для *аффинной геометрии* и *проективной группы* (всех коллинеаций) для *проективной геометрии*. Теоремы *геометрии обратных радиусов* остаются в силе при всех преобразованиях, получаемых композицией любых преобразований посредством обратных радиусов с подстановками главной группы; все они вместе взятые снова образуют некоторую группу, а именно — *группу обратных радиусов*. Наконец, в случае Analysis situs имеем дело с *группой всех взаимно однозначных непрерывных отображений*[123]).

Теперь я хочу установить, от скольких независимых параметров зависит отдельная операция в каждой из этих групп. В главной группе содержатся движения с шестью параметрами и к ним присоеди-

няется еще один параметр (коэффициент гомотетии), так что в общем имеется *семь параметров*; мы выражаем это, обозначая *главную группу* через $\mathfrak{G}_7$. Уравнения общего аффинного преобразования содержат $3 \cdot 4 = 12$, а уравнения проективного преобразования $4 \cdot 4 = 16$ произвольных коэффициентов, причем, однако, в последнем случае один общий множитель не имеет существенного значения; таким образом, *аффинная группа есть некоторая* $\mathfrak{G}_{12}$, *а проективная — некоторая* $\mathfrak{G}_{15}$. *Группа обратных радиусов* представляет собой — я сообщаю это здесь без доказательства — *некоторую* $\mathfrak{G}_{10}$ и, наконец, *группа всех гомеоморфизмов* вообще не имеет конечного числа параметров, так как ее операции зависят от произвольных функций или, если угодно, от бесконечно многих параметров (эту группу обозначаем через $\mathfrak{G}_\infty$).

В установленной нами связи различных видов геометрий с группами преобразований можно усмотреть *основной принцип*, служащий для характеристики всех вообще возможных[124]) геометрий. В этом именно и заключается основная мысль моей эрлангенской программы: *пусть дана какая-либо группа пространственных преобразований, которая содержит главную группу как свою часть*; *тогда теория инвариантов этой группы даст определенный вид геометрии, и таким образом можно получить любую возможную геометрию*[125]). В качестве характеристики каждой геометрии всегда ставят на первый план ее группу.

Этот принцип в литературе проведен полностью только для первых трех случаев нашей схемы[126]); ими, как наиболее важными или наиболее известными, мы займемся еще немного, и при этом прежде всего рассмотрим переход от одного случая к другому.

Меняя порядок изложения на обратный, я начинаю с проективной геометрии, т. е. с группы $\mathfrak{G}_{15}$ *всех проективных преобразований*, которые мы записываем в однородных координатах:

$$\begin{aligned} \rho'\xi' &= a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1\tau, \\ \rho'\eta' &= a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2\tau, \\ \rho'\zeta' &= a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3\tau, \\ \rho'\tau' &= a_4\xi + b_4\eta + c_4\zeta + d_4\tau. \end{aligned} \tag{1}$$

Чтобы прийти отсюда к аффинной группе, воспользуемся тем замечанием, что проективное соответствие становится аффинным в том случае, если оно переводит бесконечно удаленную плоскость в себя, т. е. если каждой точке с $\tau = 0$ соответствует точка с $\tau' = 0$. На самом деле это сводится к тому, что $a_4 = b_4 = c_4 = 0$, и поэтому из уравнений (1) получаются путем деления (первых трех уравнений на четвертое), если, кроме того, заменить частные a_1/d_4, ... просто через a_1, ... , такие уравнения в неоднородном виде:

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ y' &= a_2x + b_2x + c_2x + d_2, \\ z' &= a_3x + b_3x + c_3x + d_3, \end{aligned} \qquad (2)$$

а это действительно — наши старые формулы аффинного соответствия. Таким образом, *условие неизменяемости бесконечно удаленной плоскости* выделяет из проективной группы $\mathfrak{G}_{15}$ некоторую 12-параметрическую «подгруппу», а именно, как раз *аффинную группу*.

Вполне аналогичным образом можно прийти к *главной группе* $\mathfrak{G}_7$, определяя те проективные или соответственно аффинные преобразования, которые, кроме бесконечно далекой плоскости, переводят в себя также и *мнимую* окружность *сфер*, т. е. те преобразования, при которых каждой точке, удовлетворяющей уравнениям

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0, \quad \tau = 0,$$

соответствует точка, удовлетворяющая тем же уравнениям. Вы легко можете убедиться в правильности этого утверждения, стоит только обратить внимание на то, что наше условие определяет с точностью до некоторого постоянного множителя как раз шесть (однородных) констант конического сечения, соответствующего окружности сфер в силу аффинного соответствия в плоскости $\tau' = 0$, и поэтому накладывает на 12 констант аффинного соответствия $6 - 1 = 5$ условий, так что остается как раз $12 - 5 = 7$ параметров группы $\mathfrak{G}_7$.

Принцип Кэли: проективная геометрия — это вся геометрия. Весь этот ход идей получил в 1859 г. очень важный новый оборот в руках великого английского геометра Кэли. В то время как до сих пор казалось, что аффинная и проективная геометрия являются сравнительно более скудными извлечениями из метрической геометрии, Кэли считает возможным, наоборот, *как аффинную, так и метрическую геометрию включить* в проективную в *качестве ее частных случаев* (т. е. «проективная геометрия — это вся геометрия»). Это соотношение, кажущееся, пожалуй, на первый взгляд парадоксальным, обнаруживается в том случае, если к исследуемым фигурам присоединить определенные образы, а именно, *бесконечно удаленную плоскость* или соответственно *окружность сфер на ней*; *тогда аффинные или соответственно метрические свойства фигуры оказываются не чем иным, как проективными свойствами расширенной* (*пополненной*) *таким образом фигуры*.

Позвольте мне это разъяснить прежде всего на двух очень простых примерах, причем я лишь выскажу в несколько измененной форме уже ранее известные вам факты. То, что две прямые параллельны, не имеет для проективной геометрии вначале никакого значения; если же к данным образам (к обеим прямым) присоединить бесконечно удаленную плоскость, то становится правильным (ср. с. 142—143) то чисто проективное утверждение, что две данные прямые пересекаются на данной плоскости. Нечто подобное имеем в том случае, если прямая расположена перпендикулярно к некоторой плоскости. Это можно свести (ср. с. 189—191) к некоторому полярному соотношению — ведь это есть некоторое проективное свойство нашей фигуры, расширенной присоединением к ней окружности сфер (ср. рис. 98); в самом деле, точка P_∞, являющаяся следом прямой, и прямая g_∞, являющаяся следом плоскости на бесконечно удаленной плоскости, должны по отношению к окружности сфер представить полюс и поляру[127].

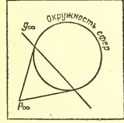


Рис. 98

Теперь я хотел бы полнее развить намеченный здесь ход идей и показать, как он приводит к некоторому вполне систематическому построению геометрии. Наибольшая заслуга в этом отношении принадлежит англичанам; я уже назвал Кэли и рядом с ним я должен упомянуть еще Сильвестра и Сальмона из Дублина. Эти геометры создали, начиная с 1850 г., ту алгебраическую дисциплину, которую называют в более узком смысле теорией инвариантов линейных однородных подстановок*) и которая делает возможным при помощи принципа Кэли дать полную систематику геометрии на аналитической основе. Для понимания этой систематики нам необходимо предварительно заняться немного самой теорией инвариантов.

2. Отступление в область теории инвариантов линейных подстановок

Конечно, здесь я могу изложить в форме краткого реферата лишь главные ходы мыслей и результаты, не приводя ни деталей, ни доказательств [128]).

1) Переходя теперь к нашей теме, мы представляем себе заданным произвольное число переменных и соответственно этому говорим о *бинарной, тернарной, кватернарной, ...* (или *двоичной, троичной, четверичной, ...*) *области.* Имея в виду позже рассматривать переменные в первых трех случаях как однородные координаты на прямой, на плоскости или в пространстве, вводим для них обозначения

$$\xi,\ \tau; \quad \xi,\ \eta,\ \tau; \quad \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \tau;$$

причем уравнение $\tau = 0$ всегда должно будет характеризовать бесконечно удаленные элементы.

2) Мы рассматриваем группы всех однородных линейных подстановок этих переменных, причем на первое время мы будем принимать во внимание не только отношения переменных (так мы будем поступать позже в проективной геометрии), но также

*) Термин «теория инвариантов» употребляют также в более широком смысле, относя его к любым группам преобразований; в том более узком смысле, в каком мы будем его понимать в дальнейшем, его стал впервые употреблять Сильвестр.

и их индивидуальные значения. Эти подстановки записываем в таком виде:

$$\begin{aligned}\xi'&=a_1\xi+d_1\tau,\\ \tau'&=a_4\xi+d_4\tau,\end{aligned}\qquad \begin{aligned}\xi'&=a_1\xi+b_1\eta+d_1\tau,\\ \eta'&=a_2\xi+b_2\eta+d_2\tau,\\ \tau'&=a_4\xi+b_4\eta+d_4\tau,\end{aligned}\qquad \begin{aligned}\xi'&=a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta+d_1\tau,\\ \eta'&=a_2\xi+b_2\eta+c_2\zeta+d_2\tau,\\ \zeta'&=a_3\xi+b_3\eta+c_3\zeta+d_3\tau,\\ \tau'&=a_4\xi+b_4\eta+c_4\zeta+d_4\tau.\end{aligned}$$

Число параметров в этих трех группах равно соответственно 4, 9, 16.

Чтобы в дальнейшем можно было охватить одной записью пространства различного числа измерений, мы будем выписывать в формулах всегда лишь переменные ξ и τ и составленные из них члены, отделяя их друг от друга многоточием.

Тогда в случае бинарной области надо будет просто игнорировать многоточие, а в случае троичной или четверичной области заменять их членами, содержащими η или соответственно η и ζ, аналогичными выписанным членам (с ξ и τ). Мы будем, таким образом, говорить о переменных $\xi, \ldots, \tau$ и о выполняемых над ними подстановках

$$\begin{aligned}\xi' &= a_1\xi + \ldots + d_1\tau,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \tau' &= a_4\xi + \ldots + d_4\tau.\end{aligned}\qquad (1)$$

Систематика теории инвариантов.

3) Что касается объектов теории инвариантов, то можно различать две стадии в постановке вопроса. Во-первых, пусть даны любые отдельные системы значений переменных

$$\xi_1, \ldots, \tau_1;\ \ \xi_2, \ldots, \tau_2;\ \ \xi_3, \ldots, \tau_3;\ \ldots;$$

имея в виду геометрические приложения, мы можем уже теперь обозначать их просто как точки 1; 2; 3; ... Каждую из этих систем значений в отдельности подвергаем подстановкам группы (1); вопрос сводится к тому чтобы *образовать такие комбинации наших систем значений, которые оставались бы инвариантными при этих одновременных подстановках.*

4) *Вторая стадия* в постановке вопроса имеет дело наряду с такими точками также и с *функциями переменных*, а именно, в первую очередь с *целыми рациональными функциями*; при этом можно ограни-

читься *однородными* целыми рациональными функциями — в теории инвариантов их называют *формами*, — так как члены одинакового измерения и без того переходят друг в друга по причине однородности подстановок. Таким образом, нам придется рассматривать сначала *линейные формы*:

$$\varphi = \alpha\xi + \ldots + \delta\tau,$$

затем *квадратичные формы*

$$f = A\xi^2 + \ldots + 2G\xi\tau + \ldots + K\tau^2$$

и т. д. Нам придется также рассматривать одновременно *несколько форм* одного и того же измерения, различая их при помощи индексов, например:

$$\varphi_1 = \alpha_1\xi + \ldots + \delta_1\tau, \quad \varphi_2 = \alpha_2\xi + \ldots + \delta_2\tau, \ \ldots$$

Исходным пунктом могут служить также *формы со многими рядами переменных*, например билинейные формы

$$f = \mathrm{A}\xi_1\xi_2 + \ldots + \Delta\xi_1\tau_2 + \ldots + \mathrm{N}\tau_1\xi_2 + \ldots + \Pi\tau_1\tau_2.$$

Для выяснения возникающей здесь общей проблемы мы должны сначала разобраться в том, *как преобразуются коэффициенты этих форм*, если переменные подвергаются подстановкам группы (1), а значение формы φ или соответственно f остается неизменным.

Рассмотрим сначала линейную форму, полагая

$$\varphi = \alpha\xi + \ldots + \delta\tau = \alpha'\xi' + \ldots + \delta'\tau'.$$

Если ввести выражения (1) для $\xi', \ldots, \tau'$, то должно иметь место такое тождество относительно переменных $\xi, \ldots, \tau$:

$$\alpha\xi + \ldots + \delta\tau = \alpha'(a_1\xi + \ldots + d_1\tau) + \ldots$$
$$\ldots + \delta'(a_4\xi + \ldots + d_4\tau) =$$
$$= (\alpha' a_1 + \ldots + \delta' a_4)\xi + \ldots + (\alpha' d_1 + \ldots + \delta' d_4)\tau.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1\alpha' + \ldots + a_4\delta', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta &= d_1\alpha' + \ldots + d_4\delta'. \end{aligned} \qquad (2)$$

Таким образом, новые коэффициенты $\alpha', \ldots, \delta'$ линейной формы связаны со старыми коэффициентами $\alpha, \ldots, \delta$ в свою очередь линейною подстановкою, получаемою из (1) следующим простым образом: переставляем вертикальные и горизонтальные ряды в схеме коэффициентов («транспонируем» подстановку) и, кроме того, меняем местами старые величины (не имеющие штрихов) и новые (со штрихами). Получаемую таким образом подстановку называют *контрагредиентной* по отношению к первоначальной подстановке (1) и говорят для краткости, *что коэффициенты* $\alpha, \ldots, \delta$ *линейной формы преобразуются контрагредиентным образом по сравнению с переменными* $\xi, \ldots, \tau$. Ранее рассмотренные ряды переменных $\xi_1, \ldots, \tau_1$; $\xi_2, \ldots, \tau_2$; ..., которые подлежат все вместе каждый раз одному и тому же преобразованию (1), в аналогичной терминологии носят название *когредиентных переменных.*

Переходя к *квадратичной форме* f, сообразим прежде всего, как ведут себя при линейной подстановке входящие в нее члены второго измерения $\xi^2, \ldots, \xi\tau, \ldots, \tau^2$; на основании (1) сразу же находим для членов второго измерения с новыми переменными такие выражения:

$$
\begin{aligned}
\xi'^2 &= a_1^2\xi^2 + \ldots + 2a_1d_1\xi\tau + \ldots + d_1^2\tau^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi'\tau' &= a_1a_4\xi^2 + \ldots + (a_1d_4 + a_4d_1)\xi\tau + \ldots + d_1d_4\tau^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\tau'^2 &= a_4^2\xi^2 + \ldots + 2a_4d_4\xi\tau + \ldots + d_4^2\tau^2.
\end{aligned} \qquad (3)
$$

Это мы можем выразить в такой форме: члены второго измерения относительно переменных испытывают одновременно с ними однородную линейную подстановку, получаемую непосредственно из (1). Но f является линейной формой этих квадратичных членов, так что, повторяя в точности прежние рассуждения, мы видим, что коэффициенты $A, \ldots, 2G, \ldots, K$, преобразовываются линейно-однородно, а именно, контрагредиентно по отношению к подстановке (3) членов $\xi^2, \ldots, \xi\tau, \ldots, \tau^2$; другими словами, уравнения, содержащие $A, \ldots, 2G, \ldots, K$ и $A', \ldots, 2G', \ldots, K'$, получаются из (3) точно так же, как уравнения (2) из (1).

5) Теперь мы можем сформулировать *общую проблему теории инвариантов*. Если задан какой-либо ряд точек 1; 2; ..., а также ряд линейных, квадратичных либо высших форм φ_1; φ_2; ...; f_1; f_2; ..., то под *инвариантом* понимают такую функцию координат $\xi_1, \ldots, \tau_1$; $\xi_2, \ldots, \tau_2$; ... *и коэффициентов* $\alpha_1, \ldots, \delta_1$; $\alpha_2, \ldots, \delta_2$; ...; $A_1, \ldots, K_1$; $A_2, \ldots, K_2$; ..., *которая остается без изменения при линейных подстановках переменных* (1) *и при соответственных только что определенных подстановках систем коэффициентов. Требуется изучить совокупность всех вообще возможных инвариантов.*

В литературе встречаются также при случае слова: *ковариант* и *контравариант* для обозначения особых видов образований, обозначаемых здесь общим названием инвариантов[129]). А именно, если в инвариантное выражение входят сами ряды переменных $\xi_1, \ldots, \tau_1$; $\xi_2, \ldots, \tau_2$; ..., то говорят о *ковариантах*; если же в него входят коэффициенты линейных форм $\alpha_1, \ldots, \delta_1$; $\alpha_2, \ldots, \delta_2$; ..., то употребляют термин *контравариант*. Слово же *инвариант* употребляют тогда в применении к таким выражениям, которые не содержат ни координат $\xi_1, \ldots$, ни коэффициентов $\alpha_1, \ldots$ и составлены исключительно из коэффициентов квадратичных или высших форм. Выделение и противопоставление первых двух случаев объясняется тем, что ряды переменных $\xi, \ldots, \tau$, с одной стороны, и $\alpha, \ldots, \delta$, с другой стороны, обнаруживают до известной степени взаимно обратное поведение: когда одни из них подвергаются некоторой линейной подстановке, другие испытывают как раз контрагредиентную подстановку независимо от того, какой ряд переменных является исходным. Таким образом, из каждого инвариантного образования, составленного из величин одного рода, можно при помощи подходящего преобразования получить такое же образование из величин другого рода. В геометрическом истолковании это дает, очевидно, *принцип двойственности*, так как $\alpha, \ldots, \delta$ становятся однородными линейными или соответственно плоскостными координатами, если $\xi, \ldots, \tau$ рассматривать как точечные координаты. Впрочем, различение того, входят или не входят системы значений $\xi, \ldots, \tau$ или соответственно значений $\alpha, \ldots, \delta$ в те выражения,

которые надо рассмотреть, конечно, совершенно лишено основного значения; поэтому *в дальнейшем мы будем употреблять слово «инвариант» в более широком смысле.*

6) Теперь я попытаюсь более четко очертить в другом направлении это понятие инварианта, чтобы сделать возможным аккуратное построение теории. В дальнейшем мы будем рассматривать в качестве инвариантов только *рациональные функции координат и коэффициентов*, которые сверх того являются однородными относительно координат каждой отдельной входящей в них точки и относительно коэффициентов каждой отдельной входящей в них формы. Каждую такую рациональную функцию мы можем представить в виде частного двух целых рациональных однородных функций, которые мы будем исследовать каждую в отдельности. Так как общий множитель числителя и знаменателя не меняет величины частного, то числитель и знаменатель, конечно, не обязаны непременно быть инвариантами в том смысле, в каком мы до сих пор понимали этот термин, но могут при каждой линейной подстановке приобретать какой-либо множитель.

Можно показать, что этот множитель зависит исключительно от коэффициентов подстановки и является всегда некоторой *степенью определителя подстановки*

$$r = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & d_1 \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ a_4 & \dots & d_4 \end{vmatrix}.$$

Таким путем мы приходим в конце концов к *рассмотрению таких целых рациональных однородных функций данных рядов величин, которые при установленных выше линейных подстановках переменных и коэффициентов умножаются на некоторую степень r^λ определителя подстановки.* Их называют *относительными инвариантами*, так как они испытывают лишь несущественные изменения, а в случае подстановок, для которых $r = 1$, и вовсе не изменяются. Показатель λ носит название *веса инварианта.* В противоположность этому то, что мы до сих пор называли просто инвариантом, называют *абсолютным инвариантом*; таким образом, каждый абсолютный

инвариант равен частному двух относительных инвариантов одинакового веса.

7) Это действительно дает нам руководящую точку зрения для систематизации теории инвариантов. Простейшими относительными инвариантами являются те, которые представляют собой многочлены *наиболее низкой степени* относительно данных рядов величин; исходя из них, переходят к инвариантам более высокой степени. Если J_1, J_2 представляют собой какие-либо относительные инварианты, то всякое произведение их степеней $J_1^{k_1} J_2^{k_2}$ оказывается тоже относительным инвариантом; ведь если J_1 получает при подстановке множитель r^{λ_1}, а J_2 — множитель r^{λ_2}, то $J_1^{k_1} J_2^{k_2}$ воспроизводится с точностью до множителя $r^{k_1\lambda_1+k_2\lambda_2}$. Составляя сумму таких членов, умноженных, кроме того, на некоторые постоянные множители:

$$\sum_{(k_1, k_2, \ldots)} C_{k_1 k_2 \ldots} J_1^{k_1} J_2^{k_2} \ldots,$$

и следя при этом за тем, чтобы отдельные слагаемые умножались всегда на одну и ту же степень определителя r, т. е. за тем, чтобы все они имели равный вес или — как говорят — были «изобаричными», получаем, очевидно, снова относительный инвариант более высокой степени, так как общий множитель отдельных членов просто выходит за знак суммы.

Центральной проблемой теории инвариантов является, конечно, вопрос, можно ли таким образом всегда получить *все* инварианты: что является в каждом определенном случае полной системой наинизших инвариантов, из которых могут быть построены указанным целым и рациональным способом все относительные инварианты? И вот основная теорема состоит в том, что *каждому конечному числу заданных величин всегда соответствует подобная конечная «полная система инвариантов»*, т. е. *конечное число инвариантов, из которых все прочие составляются целым рациональным образом.* Этими окончательными результатами систематической теории инвариантов мы обязаны немецким исследователям, а именно,

Гордану и Гильберту (работа которого опубликована в 1890 г.)*).

Примеры. Теперь я хотел бы изложенные абстрактные идеи разъяснить несколько конкретнее на *простых примерах*, которые нам пригодятся вслед за этим в геометрии, причем я и тут, конечно, буду больше реферировать, чем доказывать.

1) Допустим сначала, что в *бинарной области* задано некоторое *число точек*

$$\xi_1,\ \tau_1;\quad \xi_2,\ \tau_2;\quad \xi_3,\ \tau_3;\ \ldots$$

В таком случае имеет место такая интересная теорема: *простейшие инварианты получаются с помощью определителей второго порядка, которые можно составить из этих координат, и эти определители образуют в то же время полную систему инвариантов.*

Из двух точек *1*, *2* мы можем составить один определитель второго порядка

$$\Delta_{12}=\begin{vmatrix}\xi_1 & \tau_1\\ \xi_2 & \tau_2\end{vmatrix}.$$

Он действительно представляет собой целую рациональную функцию переменных, однородную как относительно ξ_1, τ_1, так и относительно ξ_2, τ_2. В его инвариантной природе мы убедимся сразу, если вычислим его, пользуясь теоремой умножения определителей:

$$\Delta'_{12}=\begin{vmatrix}\xi'_1 & \tau'_1\\ \xi'_2 & \tau'_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1\xi_1+d_1\tau_1 & a_4\xi_1+d_4\tau_1\\ a_1\xi_2+d_1\tau_2 & a_4\xi_2+d_4\tau_2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & d_1\\ a_4 & d_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\xi_1 & \tau_1\\ \xi_2 & \tau_2\end{vmatrix}=r\Delta_{12},$$

так что, действительно, мы имеем дело с инвариантом *веса* 1. Подобным же образом n точек 1, 2, ..., n дают в общем $\frac{n(n-1)}{2}$ инвариантов веса 1:

$$\Delta_{ik}=\begin{vmatrix}\xi_i & \tau_i\\ \xi_k & \tau_k\end{vmatrix}\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

*) Hilbert D. Über die Theorie der algebraischen Formen// Math. Ann. — 1890. — Bd. 36. — S. 437.

мы зашли бы, конечно, слишком далеко, если бы стали доказывать здесь, что эти определители образуют *полную* систему инвариантов, т. е. что каждый относительный инвариант n точек может быть представлен в виде суммы изобаричных членов:

$$\sum C\Delta_{ik}^{s}\Delta_{lm}^{t} \ldots$$

Из этих относительных инвариантов получаются самые общие рациональные абсолютные инварианты в виде частных числителя и знаменателя, имеющих одинаковый вес; таким образом, простым примером абсолютного инварианта было бы частное $\frac{\Delta_{ik}}{\Delta_{lm}}$.

Я хотел бы на этом примере разъяснить еще одно более тонкое понятие, играющее в теории инвариантов большую роль, а именно, понятие *сизигий* *) (т. е. «связываний» или соотношений инвариантов). А именно, может случиться, что некоторые из упомянутых агрегатов, составленных из основных инвариантов, тождественно обращаются в нуль; так, например, в случае четырех точек

$$\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}\Delta_{42} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 0,$$

что сводится попросту к известному тождеству из теории определителей, которым к тому же нам уже случалось воспользоваться [130]). Подобное тождество, связывающее инварианты полной системы, и называется *сизигией*. Имея несколько таких сизигий, можно путем сложения и умножения получать из них новые; можно, как и в случае самих инвариантов, поставить вопрос о *полной системе сизигий*, из которых все прочие могут быть построены указанным образом. Теория показывает, что всегда существует конечная система сизигий подобного рода. Так, например, в случае четырех точек эта полная система состоит из одного только вышенаписанного уравнения. т. е. все тождества, связывающие шесть определителей $\Delta_{12}, \ldots, \Delta_{34}$, являются следствиями этого одного тождества; в случае большего числа точек такая система состоит из всех уравнений такого же типа. Разумеется, знание этих сизигий имеет фундаментальное

*) «Сизигия» — астрономический термин, означающий соединение или противостояние планет.

значение для знания всей системы инвариантов, ибо в том случае, когда два изобаричные агрегата простейших инвариантов отличаются один от другого членами, имеющими множителем левую часть какой-нибудь сизигии, эти агрегаты тождественны, и нам незачем перечислять их дважды.

2) Если заданы отдельные точки в троичной либо в четверичной области, то строим совершенно таким же образом полные системы инвариантов посредством определителей третьего и четвертого порядка, составленных из их координат; например, в троичной области фундаментальный инвариант трех точек снова имеет вес 1:

$$\Delta_{123} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \tau_3 \end{vmatrix}.$$

Предлагаю вам самим продумать, в каком виде представляется здесь все прочее, в частности отыскание сизигий.

3) Перейдем теперь сразу же к рассмотрению *квадратичной формы*, например, в четверичной области:

$$f = A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\zeta + 2E\eta\zeta + \\ + F\zeta^2 + 2G\xi\tau + 2H\eta\tau + 2J\zeta\tau + K\tau^2.$$

Мы можем, прежде всего, составить *инвариант*, зависящий только от 10 коэффициентов $A, \ldots, K$, а именно, *определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D & G \\ B & C & E & H \\ D & E & F & J \\ G & H & J & K \end{vmatrix}.$$

Так как $A, \ldots, K$ преобразуются контрагредиентно по сравнению с членами, квадратичными относительно $\xi, \ldots, \tau$, то легко можно убедиться в том, что *вес этого инварианта равен* -2:

$$\Delta' = r^{-2}\Delta.$$

Полная система инвариантов, составленных исключительно из коэффициентов формы, состоит из

одного только этого Δ, т. е. *всякий* целый рациональный инвариант, содержащий лишь $A, \ldots, K$, является кратным некоторой степени Δ.

Если же к коэффициентам формы присоединить *координаты* ξ, η, ζ, τ какой-либо точки, то сама форма f оказывается *простейшим общим инвариантом*, или, согласно упомянутой выше терминологии, *ковариантом*, так как само определение преобразований коэффициентов $A, \ldots, K$ было основано на требовании ее инвариантности, и, вообще, всякая заданная форма является, очевидно, своим же собственным ковариантом. Она вовсе не изменяется при наших подстановках в силу самого их определения, представляя собой, следовательно, инвариант веса 0, или абсолютный инвариант. В случае *двух точек* $\xi_1, \ldots, \tau_1$ и $\xi_2, \ldots, \tau_2$ в качестве нового коварианта появляется так называемая *полярная форма*

$$A\xi_1\xi_2 + B(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + C\eta_1\eta_2 + \ldots + K\tau_1\tau_2,$$

вес которой *снова* равен нулю, т. е. опять-таки представляющая собой *абсолютный инвариант*.

Наконец, рассматривая одновременно с f еще *какую-нибудь линейную форму* φ, т. е. совокупность ее коэффициентов α, β, γ, δ, получаем следующий *совместный инвариант веса* — 2, который возникает из определителя с помощью «окаймления» его элементами $\alpha, \ldots, \delta$:

$$\begin{vmatrix} A & B & D & G & \alpha \\ B & C & E & H & \beta \\ D & E & F & J & \gamma \\ G & H & J & K & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \end{vmatrix}.$$

Согласно сказанному ранее его можно назвать также *контравариантом*. Как известно, этот определитель играет большую роль в аналитической геометрии в тех случаях, когда хотят поверхность второго порядка представить в плоскостных координатах; как видите, в этом случае в основе лежит чисто аналитический процесс образования инвариантов.

Точно так же в случае *двух линейных форм* φ_1, φ_2 с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \delta_1$ и $\alpha_2, \ldots, \delta_2$ можно посредством «двукратного окаймления» того же самого

определителя образовать *еще один инвариант*:

$$\begin{vmatrix} A & B & D & G & \alpha_1 & \alpha_2 \\ B & C & E & H & \beta_1 & \beta_2 \\ D & E & F & J & \gamma_1 & \gamma_2 \\ G & H & J & K & \delta_1 & \delta_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

который тоже имеет *вес* —2.

Этих немногих указаний достаточно для того, чтобы позволить вам заглянуть в грандиозную область теории инвариантов. Эта теория развилась в необычайно широкое учение, в которой особенно много остроумия затрачено на отыскание приемов, позволяющих при произвольно заданных основных формах составить полную систему инвариантов и сизигий.

Сделаю еще одно только замечание общего характера по этому поводу. В наших примерах мы всегда создавали инварианты путем образования определителей; таким образом, вообще *теория определителей всегда оказывается основой теории инвариантов*. Такое положение дел побудило Кэли первоначально дать инвариантам название «гипердетерминантов» (сверхопределителей). Лишь позже Сильвестр ввел слово «инвариант». Представляется крайне интересным поставить такой вопрос: насколько важной следует считать в рамках всей математики какую-нибудь отдельную ее главу, например теорию определителей? Кэли сказал как-то в разговоре со мною, что в случае, если бы ему пришлось прочесть 15 лекций по всей математике, то *одну* лекцию он посвятил бы определителям. Подумайте, можете ли и вы на основании вашего опыта дать такую же оценку теории определителей! Я лично в моих обычных элементарных курсах из педагогических соображений все более и более оттесняю теорию определителей; я слишком часто наблюдал, что студенты вполне свыкаются с матрицами и научаются сокращать с их помощью очень целесообразным образом длинные выражения, но что для них очень часто значение этих матриц отнюдь не бывает ясно и что привычка к ним скорее даже мешает им вникнуть во все детали предмета вплоть до полного овладения им. Но, разумеется, при

рассуждениях общего характера и, в частности, здесь в теории инвариантов мы никак не можем обойтись без определителей.

Теперь, наконец, мы подошли к нашей настоящей цели — с помощью предшествующих рассмотрений получить систематизацию геометрии.

3. Приложение теории инвариантов к геометрии

Интерпретация теории инвариантов с n переменными в терминах аффинных преобразований пространства R_n с неподвижным началом. Начинаем с того, что рассматриваем переменные $\xi, \ldots, \tau$ *как обыкновенные ортогональные неоднородные координаты*, т. е. ξ, τ как координаты на плоскости, ξ, η, τ — в трехмерном пространстве, ξ, η, ζ, τ — в четырехмерном пространстве и т. д. Линейные однородные подстановки теории инвариантов

$$\begin{aligned} \xi' &= a_1\xi + \ldots + d_1\tau, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \tau' &= a_4\xi + \ldots + d_4\tau \end{aligned} \qquad (1)$$

изображают в таком случае *совокупность аффинных преобразований рассматриваемого пространства при неподвижном начале координат*. Таким образом, отдельные относительные инварианты сами по себе оказываются такими геометрическими величинами, которые при всех аффинных преобразованиях остаются без изменения «с точностью до некоторого множителя» (т. е. не считая возможного появления некоторого множителя), иными словами, величинами, которые имеют определенное значение в аффинной геометрии, определяемой этими преобразованиями.

Если, например, в бинарном случае, т. е. в плоскости, даны две точки *1*, *2*, то основной инвариант Δ_{12} изображает двойную площадь треугольника (*O 1 2*), взятую с надлежащим знаком, как мы это уже знаем из предшествующего. Поскольку известно (ср. аналогичное свойство для пространства), что при аффинном преобразовании площадь треугольника лишь умножается на определитель подстановки, то это и означает, что Δ_{12} представляет собой относительный инвариант веса 1. Частное $\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{34}}$ двух площа-

дей остается абсолютно неизменным. Точно так же инвариантный смысл имеет уравнение $\Delta_{12} = 0$, так как появляющийся в результате преобразования множитель для него не имееет существенного значения, и действительно это уравнение выражает тот факт (имеющий абсолютно инвариантный смысл относительно наших аффинных преобразований), что три точки *O*, *1*, *2* лежат на одной прямой.

Если же имеем большее число точек *1*, *2*, *3*, *4*, ... (рис. 99), то для них *полная система инвариантов* состоит из всех их определителей Δ_{ik}; поэтому, если удается составить какую-либо величину, зависящую целым и рациональным образом от координат, которая относительно инвариантна при всех аффинных преобразованиях (1), т. е. которая вообще имеет значение в нашей аффинной геометрии, то такая величина должна изображаться в виде *многочлена от* Δ_{ik}. Это поддается в простых случаях непосредственной геометрической проверке. Например, площадь всякой фигуры на плоскости, скажем, многоугольника (*1*, *2*, *3*, *4*), представляет инвариант такого вида; и действительно, общая формула, которую мы дали раньше (см. с. 18) для площади многоугольника, принимает в случае четырехугольника вид

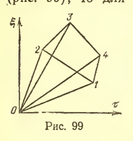


Рис. 99

$$(1, 2, 3, 4) = \Delta_{12} + \Delta_{23} + \Delta_{34} + \Delta_{41};$$

эта запись площади в виде многочлена от Δ_{ik} и представляет собой не что иное, как выражение общей теоремы для этого специального случая.

Наконец, мы должны еще сказать о *сигизиях* между инвариантами. Основная сизигия

$$\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}\Delta_{42} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 0$$

представляет собой тождество между шестью площадями треугольников, образуемых четырьмя произвольными точками и началом, т. е. некоторую общую теорему нашей аффинной геометрии. Конечно, нечто аналогичное имеем в случае каждой сизигии, и точно так же и обратно: каждая теорема нашей аффинной геометрии, поскольку она является соотношением

между инвариантами аффинных преобразований (1), должна допускать выражение при помощи сизигий. Поэтому в согласии с тем, что мы уже в свое время утверждали относительно *полной* системы сизигий в случае четырех точек, *все* теоремы, имеющие место в нашей аффинной геометрии для системы четырех точек, должны следовать из этой одной только что приведенной теоремы. Подобным же образом можно убедиться в справедливости такого общего утверждения: *теория инвариантов, которая дает полную систему как инвариантов, так и сизигий, тем самым делает возможным полное (без исключений) систематическое перечисление всех величин и теорем, возможных в нашей аффинной геометрии.*

Я и здесь не буду входить в детали этих рассуждений, упомяну только, что наряду с точками можно рассматривать также и образы нашей геометрии, определяемые формами

$$\varphi = a\xi + \delta\tau, \quad f = A\xi^2 + 2G\xi\tau + K\tau^2, \ldots$$

Подобная форма относит каждой точке плоскости некоторое числовое значение: другими словами, она определяет некоторое *скалярное поле.* С этой точки зрения нетрудно дать геометрическую интерпретацию инвариантов заданной формы, и тогда каждая сизигия между инвариантами снова изобразит некоторую геометрическую теорему.

Интерпретация теории инвариантов в проективной геометрии пространства R_{n-1}. Наряду с этим (я бы сказал наивным) истолкованием теории инвариантов в геометрии n-мерного пространства, в котором n переменных играют роль обыкновенных прямоугольных координат, рассмотрению подлежит еще одна существенно иная интерпретация: все эти переменные можно также рассматривать (при $\tau \neq 0$) *как однородные координаты* в $(n-1)$-мерном пространстве R_{n-1}, неоднородные координаты которого равны $x = \frac{\xi}{\tau}, \ldots$; при этом множитель, общий этим n координатам, не имеет существенного значения. Мы раньше уже выяснили (с. 134—136) взаимосвязь этих координат пространств R_{n-1} и R_n; мы рассматривали R_{n-1} как $(n-1)$-мерную плоскость $\tau = 1$ пространства R_n и проектировали ее точки прямыми,

исходящими из начала координат этого пространства R_n. Тогда все возможные системы значений однородных координат любой точки из R_{n-1} оказывались тождественными с координатами всех соответствующих ей (т. е. лежащих на одной с нею прямой) точек в R_n, а все линейные подстановки однородных координат в R_{n-1} изображают *проективные преобразования*, причем все подстановки, различающиеся только произвольным множителем ρ',

$$\rho'\xi' = a_1\xi + \ldots + d_1\tau,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho'\tau' = a_4\xi + \ldots + d_4\tau$$

дают одно и то же проективное преобразование. Поэтому фигурирующая здесь *группа всех проективных преобразований* содержит не n^2, а только $n^2 - 1$ *произвольных постоянных*; в R_2 и R_3 этими числами будут, в частности, 8 и соответственно 15.

Желая дать *геометрическое истолкование теории инвариантов n* переменных $\xi, \ldots, \tau$ в *проективной геометрии пространства* R_{n-1}, мы должны прежде всего принять во внимание, что как раз ввиду применения однородных координат только те величины и соотношения теории инвариантов могут иметь значение, которые оказываются однородными и притом нулевого порядка в координатах $\xi, \ldots, \tau$ каждой отдельной используемой точки и которые обладают тем же свойством также и по отношению к каждой отдельной могущей появиться системе коэффициентов какой-либо линейной, квадратичной и т. д. формы.

Это станет всего яснее, если я сразу же перейду к конкретным *примерам*. Достаточно будет говорить о *бинарной области* ($n = 2$). Имеем, таким образом, две переменных ξ, τ и интерпретируем $x = \frac{\xi}{\tau}$ *как абсциссу на прямой*. Если дан ряд систем значений $\xi_1, \tau_1; \xi_2, \tau_2; \ldots; \xi_p, \tau_p$, то мы знаем, что определители

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} \xi_i & \tau_i \\ \xi_k & \tau_k \end{vmatrix} \qquad (i, k = 1, \ldots, p)$$

составляют полную систему основных инвариантов. Какие же из утверждений об инвариантах имеют значение в проективной геометрии? Уже во всяком случае не утверждение, что некоторый определитель Δ_{ik}

имеет то или иное определенное числовое значение, так как при умножении координат ξ_i, τ_i на множитель ρ, отчего точка i не меняется, определитель Δ_{ik} умножается на ρ^2. Но *обращение в нуль* одного из определителей Δ_{ik}, т. е. *соотношение* $\Delta_{ik} = 0$, конечно, имеет проективно-геометрический смысл, ибо его можно записать в виде пропорции $\frac{\xi_i}{\tau_i} = \frac{\xi_k}{\tau_k}$, так что, действительно, в это соотношение входят только *отношения* координат обеих точек, и геометрическое значение этого соотношения — *совпадение точек* i и k — является очевидным.

Но чтобы получить *числовой инвариант*, который сам имеет нулевое измерение относительно координат каждой точки, надо скомбинировать более двух точек. Путем различных проб находим, что для этого требуется самое меньшее четыре точки *1*, *2*, *3*, *4*, а именно, в таком случае каждое частное вида

$$\frac{\Delta_{12}\Delta_{34}}{\Delta_{14}\Delta_{32}}$$

оказывается однородным нулевого измерения относительно каждой из четырех пар переменных ξ_1, τ_1; ... ...; ξ_4, τ_4. Из этого в то же время следует, что это частное имеет вес нуль, т. е. представляет собой *абсолютный инвариант*. Эта величина имеет поэтому *проективный смысл* и представляет собой числовое значение, инвариантное по отношению ко всем проективным преобразованиям прямой. Разумеется, эта величина является не чем иным, как *двойным* (или *ангармоническим*) отношением четырех точек, написанных в определенной последовательности, ибо ее можно сразу же записать в неоднородных координатах в следующем виде:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} : \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4}.$$

Таким образом *двойное отношение четырех точек* получается здесь с точки зрения теории инвариантов неизбежным образом как *простейший инвариант* ряда точек на прямой, удовлетворяющий условию однородности, необходимому для того, чтобы иметь проективно-геометрический смысл.

Я хотел бы в связи с этим высказать одно замечание общего характера. Я уже раньше отметил часто встречающееся в проективной геометрии стремление сводить все попадающиеся величины инвариантного характера к двойным отношениям. Достигнутые нами результаты дают нам основание утверждать, что это стремление лишь затрудняет приобретение более глубокого понимания строения проективной геометрии. Гораздо лучше, если сначала ищут все вообще рациональные целые (относительные) инварианты и уже из них образуют рациональные инварианты, в частности абсолютные, а среди последних в свою очередь удовлетворяющие условию однородности проективной геометрии. Здесь мы имеем перед собой действительную систематику, восходящую от самого простого к более сложному, которая затушевывается, если выдвигать на первое место специальный частный случай рационального инварианта — двойное отношение — и пытаться представить другие инварианты исключительно с его помощью.

Посмотрим теперь, к каким именно теоремам проективной геометрии приводят *сизигии* между инвариантами Δ_{ik}. Снова берем за исходный пункт фундаментальную сизигию

$$\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}\Delta_{42} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 0,$$

делим ее на последнее слагаемое левой части и, принимая во внимание, что $\Delta_{23} = -\Delta_{32}$ и $\Delta_{42} = -\Delta_{24}$, находим

$$\frac{\Delta_{12}\Delta_{34}}{\Delta_{14}\Delta_{32}} = 1 - \frac{\Delta_{12}\Delta_{24}}{\Delta_{14}\Delta_{23}}.$$

Здесь слева стоит согласно первоначальному определению двойное отношение точек *1*, *2*, *3*, *4*, а справа точно таким же образом составленное двойное отношение этих же четырех точек, но с изменением их порядка: с переменой мест точек *2* и *3*; двойные отношения, соответствующие иному порядку точек, можно получить путем деления сизигии и на другие члены. Таким образом, фундаментальные сизигии между инвариантами, относящимися к любым четырем точкам, получают свое геометрическое истолкование в известных соотношениях между теми шестью

значениями, которые может принимать двойное отношение этих четырех точек в зависимости от порядка их следования.

Я не намерен здесь говорить ни о том, какую форму принимает дальнейшее построение проективной геометрии прямой на этой основе, ни об интерпретации *тернарной* и *кватернарной теории инвариантов в проективной геометрии плоскости и пространства*; детальное изложение этого вы найдете в подробных курсах проективной геометрии.

Таким образом, возникает *систематика проективной геометрии, внутренне полная* как относительно величин, которые можно в ней рассматривать (которые соответствуют инвариантам), так и относительно теорем, которые можно установить (соответственно сизигиям). Конечно, с точки зрения специалиста по теории инвариантов это толкование представляется менее удовлетворительным, чем для геометра; для первого данное в начале толкование в аффинной геометрии пространства R_{n+1} более ценно, так как в R_n имеют значение только те инварианты и сизигии, которые удовлетворяют упомянутому условию однородности.

Я хочу еще изложить более подробно только один особенно важный момент, чтобы затем снова вернуться к прерванному ранее (с. 207—209) ходу мыслей, а именно, я хотел бы показать, какой вид принимает благодаря применению теории инвариантов включение аффинной и метрической геометрии в схему проективной геометрии, ставшее возможным благодаря принципу Кэли.

4. Систематизация аффинной и метрической геометрии на основе принципа Кэли

Включение основных понятий аффинной геометрии в проективную схему. Здесь речь идет, конечно, об общей аффинной геометрии, в которой отнюдь не существует фиксированной особенной точки — начала координат, — как это имело место при рассмотренном вначале полном истолковании теории инвариантов.

Будем рассматривать сразу же трехмерное пространство с неоднородными координатами x, y, z или соответственно с однородными координатами ξ, η, ζ, τ.

Тогда принцип Кэли говорит, что *аффинная* геометрия получается из проективной, если к имеющимся образам каждый раз присоединять *бесконечно удаленную плоскость* $\tau = 0$, а *метрическая* геометрия получится, если, кроме того, присоединить *мнимую окружность сфер*

$$\tau = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0.$$

Изложение дальнейшего можно облегчить при помощи следующего замечания относительно этой окружности сфер: мы определили ее здесь посредством *двух уравнений*, т. е. как пересечение бесконечно удаленной плоскости и конуса, имеющего вершину в начале. Но мы можем также определить ее, как и вообще всякое коническое сечение, посредством *одного* только *уравнения в плоскостных координатах*, если рассматривать ее как огибающую всех касающихся ее плоскостей. Если обозначить, как это мы делали выше, «плоскостные координаты», т. е. коэффициенты линейной формы φ, буквами α, β, γ, то уравнение окружности сфер получает, как нетрудно убедиться, такой вид [131]):

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0.$$

Другими словами, это уравнение является условием того, что плоскость $\alpha\xi + \ldots + \delta\tau = 0$ касается окружности сфер. Теперь уже нетрудно понять, в чем состоит с точки зрения теории инвариантов переход от проективной к аффинной и соответственно к метрической геометрии: к заданным системам значений — координатам точек, линейным и квадратичным формам и т. д., — которые служат для описания рассматриваемой фигуры, присоединяем еще *определенную линейную форму* τ (т. е. систему коэффициентов 0, 0, 0, 1) или соответственно квадратичную форму $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, написанную в плоскостных координатах. Трактуя расширенную таким путем систему форм точно таким же образом, как и раньше, т. е. устанавливая полную систему ее инвариантов и сизигий между ними и выделяя те из них, которые удовлетворяют *условию однородности*, мы получим все понятия и теоремы аффинной или соответственно метрической геометрии. Вместе с этим связанная с теорией инвариантов систематика переносится на аф-

финную и метрическую геометрию, и я бы хотел снова указать на то (ср. с. 226), что таким образом, в частности, путем подчеркивания образования целых рациональных инвариантов и сизигий в геометрию вводится некоторая систематизирующая точка зрения, которая без этого остается почти незамеченной.

Вместо абстрактных рассуждений на эту тему я лучше сразу же разъясню и эти отношения на *простых примерах* тем, что я действительно покажу, как можно самые элементарные основные величины аффинной и метрической геометрии представить в виде совместных инвариантов как данной системы величин, так и формы τ или соответственно $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Из области *аффинной геометрии* я возьму прежде всего в качестве примера *объем T тетраэдра, образованного четырьмя точками*, который выражается, как известно, следующим образом:

$$T=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{6\,\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2\\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & \tau_3\\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 & \tau_4\end{vmatrix}.$$

Мы должны исследовать, насколько это выражение обладает упомянутым инвариантным свойством. Прежде всего, нам известно, что фигурирующий здесь определитель действительно является фундаментальным относительным инвариантом четырех точек — вершин тетраэдра. Но, с другой стороны, в знаменателе стоят значения (для этих четырех точек) линейной формы τ, присоединенной к нашей фигуре, а это ведь простейшие (абсолютные) инварианты, какие только вообще можно образовать с помощью некоторой формы. Разумеется, это надо понимать в том смысле, что после преобразования в знаменателе следует написать значения той формы, в которую переходит линейная форма τ, или что вообще в случае присоединения формы $\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta+\delta\tau$ в знаменатель должно войти произведение четырех значений этой формы [132]) для точек *1*, ..., *4*. Таким образом, T представляет собой также некоторый рациональный инвариант, а именно, он однороден и имеет нулевое измерение относительно координат каждой из четырех точек. По отношению к коэффициентам нашей

присоединенной линейной формы 0, 0, 0, 1 или соответственно α, β, γ, δ, которые входят в знаменатель, T имеет во всяком случае измерение — 4; поэтому ввиду произвольности общего множителя этих величин абсолютное значение инварианта T в проективной геометрии нашей расширенной фигуры не может иметь никакого значения.

В действительности в аффинной геометрии на первых порах тоже нет никакого средства, которое позволило бы приписать тетраэдру определенное числовое значение объема, если только заранее не были установлены единичные отрезки или соответственно единичный тетраэдр, что мы всегда допускали при использовании неоднородных координат. Но с нашей теперешной общей точки зрения это означало бы, что мы присоединяем к фигуре сверх «бесконечно удаленной плоскости» $\tau = 0$ еще дальнейшие элементы. Присоединяя, например, пятую точку и образуя *частное* двух выражений, составленных аналогично T, получаем выражение, которое удовлетворяет всем условиям однородности и представляет поэтому также некоторый *абсолютный инвариант* аффинной геометрии. А отдельно взятое выражение T является *относительным инвариантом веса* 1.

Включение грассманова принципа детерминантов в инвариантно-теоретическое понимание геометрии. Экскурс о тензорах. Теперь представляется уместным еще раз окинуть взглядом весь ход идей первого отдела, внутренняя суть которых теперь раскрывается яснее. В том, что грассмановы элементарные величины геометрии, выведенные нами там, принадлежат исключительно аффинной геометрии, мы убедились уже при специальном изучении аффинных преобразований (с. 108—133). *Но грассманов принцип определителей*, который доставил нам упомянутые величины, отнюдь не является — это мы можем теперь добавить — каким-то непонятным ухищрением, а представляет собой вполне *естественное применение теории инвариантов в аффинной геометрии*, т. е. в проективной геометрии с присоединением бесконечно удаленной плоскости. Появление на сцене обыкновенных определителей — отрезок, площадь, объем — уже достаточно выяснено только что разобранным примером. Остается еще только показать, как систе-

матика теории инвариантов приводит к общим грассмановым элементарным величинам, определяемым при помощи миноров *прямоугольных матриц.* Это в свою очередь можно лучше всего выяснить на рассмотрении случая, когда даны две точки ξ_1, η_1, τ_1; ξ_2, η_2, τ_2 в плоскости и требуется образовать эквивалент в смысле теории инвариантов принадлежащих этим точкам образов аффинной геометрии (линейный элемент, прямая, ...).

Это можно немедленно поставить в связь со сказанным выше, если присоединить третью «неопределенную» точку ξ, η, τ и снова рассматривать фундаментальный инвариант:

$$\frac{1}{\tau\tau_1\tau_2}\begin{vmatrix} \xi & \eta & \tau \\ \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \end{vmatrix}$$

как линейную форму относительно ξ, η, τ. Три коэффициента при этих переменных, т. е. миноры матрицы

$$\frac{1}{\tau_1\tau_2}\begin{Vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \end{Vmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{Vmatrix},$$

являются, таким образом, величинами, характеризующими вновь определенный образ; *это нас действительно приводит как раз к матрице, применявшейся ранее для определения линейного элемента 12.* Точно таким же образом в пространстве можно образовать относительно инвариантную линейную или соответственно билинейную форму из трех или соответственно из двух точек присоединением одной или соответственно двух четверок неопределенных координат, причем коэффициенты полученной формы дают в полном согласии с нашим прежним определением координаты плоскостного элемента или соответственно пространственного линейного элемента. Я не имею возможности развить здесь более подробно эти указания, но они будут достаточны, надеюсь, для первоначальной ориентировки и должны побудить вас к дальнейшим собственным размышлениям.

Представляется более важным теперь, после того как мы включили принцип Грассмана в теорию инвариантов, поставить вопрос о его продуктивности и, в частности, сравнить его в этом смысле с тем

принципом классификации, который был высказан (с. 205—209) для случая главной группы и дал нам там все основные геометрические образы. Рациональное распространение этого принципа классификации на случай любой линейной группы преобразований напрашивается само собой. А именно, мы будем, согласно этому принципу, в каждой «геометрии» наряду с *отдельными* целыми рациональными функциями данных рядов величин (координат, коэффициентов, форм и т. д.), которые до сих пор давали нам инварианты, рассматривать также *системы* таких функций Ξ_1, Ξ_2, ... Если подобная система при всех подстановках соответствующей группы преобразуется в себя, т. е. если аналогичным образом составленные функции Ξ_1', Ξ_2', ... преобразованных рядов величин выражаются линейно через одни только Ξ_1, Ξ_2, ... с помощью коэффициентов, которые получаются однозначно определенным образом из коэффициентов преобразования, положенного в основу, то мы говорим, что *эта система определяет некоторый образ соответствующей геометрии.* Отдельные функции, из которых состоит система, называются *компонентами* образа. Решающим признаком для природы геометрического образа является поведение его компонент по отношению к преобразованиям группы, положенной в основу. Мы будем считать два геометрических образа принадлежащими *одному и тому же виду*, если их компоненты образуют две серии из одинакового числа выражений, которые при замене координат испытывают *одну и ту же* линейную постановку, будучи, таким образом, *когредиентными* согласно нашему прежнему выражению. Если система функций, определяющая геометрический образ, состоит из одной только функции, то линейная подстановка сводится к умножению на некоторый множитель, а функция является относительным инвариантом.

Эти абстрактные вещи я хочу разъяснить на простом примере из теории инвариантов тернарной области, которую мы будем интерпретировать в аффинной геометрии трехмерного пространства при неподвижном начале. Если даны две точки ξ_1, η_1, τ_1; ξ_2, η_2, τ_2, то простейшей системой функций, в которой обе тройки координат входят однородным и симметричным образом, является система из девяти билиней-

ных членов

$$\xi_1\xi_2,\ \xi_1\eta_2,\ \xi_1\tau_2,\ \eta_1\xi_2,\ \ldots,\ \tau_1\tau_2. \quad (1)$$

В случае линейного преобразования в наших обычных обозначениях (см. с. 209—210) получаем

$$\begin{aligned}
\xi_1'\xi_2' &= a_1^2\xi_1\xi_2 + a_1b_1(\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2) + \ldots + d_1^2\tau_1\tau_2,\\
\xi_1'\eta_2' &= a_1a_2\xi_1\xi_2 + a_1b_2\xi_1\eta_2 + a_2b_1\eta_1\xi_2 + \ldots + d_1d_2\tau_1\tau_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\tau_1'\tau_2' &= a_4^2\xi_1\xi_2 + a_4b_4(\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2) + \ldots + d_4^2\tau_1\tau_2,
\end{aligned} \quad (2)$$

т. е. эти девять величин действительно образуют систему только что исследованного типа, так что мы будем их рассматривать как определяющие элементы некоторого образа нашей аффинной геометрии; этот образ и вообще всякую систему, состоящую из девяти величин, которые преобразуются согласно уравнениям (2), в последнее время называют *тензором.*

Рассматривая уравнения (2), нетрудно заметить, что из девяти величин (1) можно образовать, с одной стороны, шесть, а с другой стороны, три простые линейные комбинации, переходящие друг в друга путем линейной подстановки. Если представить себе величины (1) расположенными в виде квадратной таблицы

$$\begin{matrix}
\xi_1\xi_2 & \xi_1\eta_2 & \xi_1\tau_2\\
\eta_1\xi_2 & \eta_1\eta_2 & \eta_1\tau_2\\
\tau_1\xi_2 & \tau_1\eta_2 & \tau_1\tau_2,
\end{matrix}$$

то этими комбинациями будут, во-первых, суммы членов, расположенных симметрично относительно диагонали:

$$2\xi_1\xi_2,\quad \xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2,\quad \xi_1\tau_2 + \tau_1\xi_2,\ \ldots,\ 2\tau_1\tau_2, \quad (3)$$

а во-вторых, разности тех же членов:

$$\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2,\quad \xi_1\tau_2 - \tau_1\xi_2,\quad \eta_1\tau_2 - \tau_1\eta_2. \quad (4)$$

Формулы подстановок для систем величин (3) и (4) получаются непосредственно из уравнений (2). Это дает нам два новых образа нашей аффинной геометрии; образ, состоящий из шести величин (3), называют *симметричным тензором*, а образ, состоящий из трех величин (4), является уже знакомым

нам *плоскостным* элементом. Название *тензор* прилагается, конечно, ко всякой системе величин, которая преобразуется когредиентным образом. Оправдание прилагательного «симметричный» мы дадим немного позже.

Геометрическое значение трех величин (4) нам известно (ср. с. 49—50): это — удвоенные проекции треугольника, образованного точками $\xi_1, \eta_1, \tau_1; \xi_2, \eta_2, \tau_2$ и началом координат, с надлежащим направлением обхода на координатные плоскости; мы здесь имеем как раз один из первых образов, даваемых грассмановым принципом определителей. Можно, вообще, высказать такое предложение: *систематическое нахождение образов аффинной геометрии* с помощью нашего классификационного принципа с необходимостью приводит к *грассманову принципу определителей* и к устанавливаемым с его помощью геометрическим образам. Разумеется, я не могу входить здесь во все детали; ограничусь указанием на то, что можно получить все ранее рассмотренные образы, трактуя совершенно аналогичным образом общую аффинную геометрию на основании принципа Кэли с помощью кватернарной теории инвариантов (ср. с. 230—232).

Но важным результатом нашего исследования является установление того, что грассманов принцип определителей представляет собой нечто специальное и сам по себе отнюдь не дает всех образов аффинной геометрии. Напротив, в тензорах (1) и (3) мы имеем существенно новые геометрические образы.

Имея в виду большое значение этих образов для многих областей физики, например для учения об упругих деформациях и для теории относительности, скажем еще несколько слов о них. Прежде всего сделаем несколько замечаний, которые относятся к названию этих геометрических величин и должны помочь читателю ориентироваться в новейшей литературе по тензорному исчислению.

Слово «тензор» в первоначальном изложении исчисления кватернионов использовалось у Гамильтона в другом смысле, чем здесь. Если $q = a + bi + cj + dk$ — некоторый кватернион, то он называет выражение $T = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ не модулем кватерниона, а его тензором. Это название, введенное Га-

мильтоном, оправдывается тем, что умножение на кватернион можно истолковать геометрически (что было подробно разъяснено в первом томе, с. 99—101 и примечание 72) как поворотное растяжение при неподвижном начале координат. При этом в качестве мерила растяжений фигурирует как раз радикальное выражение, которое у Гамильтона названо тензором. В тесной связи с этим находится употребление термина «тензор» в работах Фохта по кристаллофизике. Он обозначает этим словом направленные величины, которые соответствуют таким процессам, как продольное растяжение или сжатие прямолинейного стержня, к обоим концам которого приложены силы, действующие вдоль оси стержня в противоположные стороны. Подобный тензор можно было бы нагллядно изобразить отрезком со стрелками на обоих концах, направленными в разные стороны (см. рис. 100).

Рис. 100

Рис. 101

Характер направленности так понимаемого тензора можно обозначить термином «двусторонний», а для вектора, в противоположность этому, употреблять слово «односторонний». В физике такие тензоры часто фигурируют как *тензорные тройки*, т. е. по три и со взаимно ортогональными направлениями (рис. 101). Мы познакомились раньше (ср. с. 115) с чистой однородной деформацией (чистым аффинным преобразованием), представляющей собой равномерное растяжение пространства по трем взаимно перпендикулярным направлениям, которое оставляет начало координат на месте. Вместо этого мы можем сказать теперь так: чистая однородная деформация геометрически изображается тензорной тройкой. Часто употребляемое теперь значение слова «тензор» мы получим, если станем рассматривать совокупность таких трех растяжений пространства как *одну*

геометрическую величину и, опуская слово «тройка», будем обозначать именно *эту* величину словом «тензор». Рассматриваемое в таком смысле понятие тензора в точности совпадает с тем понятием, которое мы выше обозначили термином «симметричный тензор». Действительно, чистая однородная деформация, не изменяющая положения начала координат, изображается подстановками такой структуры:

$$\begin{aligned} \xi &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \eta &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \tau &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned} \qquad (a_{ik} = a_{ki}). \tag{5}$$

Здесь числовые тройки x, y, z; ξ, η, τ можно истолковать как точечные координаты в одной и той же системе прямоугольных координат. Схема коэффициентов (матрица) этого преобразования симметрична относительно главной диагонали. Если теперь перейти к новой системе прямоугольных координат, сохраняя старое начало, то получим, как показывает простое вычисление (для перехода от x, y, z к x', y', z' и от ξ, η, τ к ξ', η', τ' служат соответственно одни и те же формулы), следующее новое изображение рассматриваемой деформации:

$$\begin{aligned} \xi' &= a'_{11}x' + a'_{12}y' + a'_{13}z', \\ \eta' &= a'_{21}x' + a'_{22}y' + a'_{23}z', \\ \tau' &= a'_{31}x' + a'_{32}y' + a'_{33}z' \end{aligned} \qquad (a'_{ik} = a'_{ki}). \tag{6}$$

При этом относительно шести коэффициентов a'_{11}, a'_{12}, ..., a'_{33} справедливы следующие утверждения:

1) они линейно зависят от шести коэффициентов a_{11}, a_{12}, ..., a_{33} и только от них, *определяя, таким образом, некоторую геометрическую величину*;

2) они преобразуются точно так же, как и билинейные относительно координат выражения (3), которые мы назвали (с. 233) компонентами *симметричного тензора*.

Прилагательное «симметричный» оправдывается структурой схемы коэффициентов формул преобразований (5), (6).

Переходя теперь к общему аффинному преобразованию, сохраняющему начало координат:

$$\begin{aligned} \xi &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \eta &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \tau &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned} \tag{7}$$

находим совершенно аналогично предыдущему, что в геометрии ортогональных преобразований девять коэффициентов $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ преобразуются таким же точно образом, как девять произведений координат (1), и представляют собой поэтому компоненты некоторой величины такого же рода, как и эти последние. При принятой нами терминологии, согласно которой употребление слова «тензор» не ограничивается исключительно чистыми однородными деформациями, это означает следующее: схема коэффициентов общего аффинного преобразования представляет собой некоторый тензор.

В литературе встречается еще большое число других названий для этого понятия. Вот некоторые из наиболее часто употребляемых:

1) *аффинор* (по причине связи с аффинными преобразованиями);

2) *линейная вектор-функция*;

3) *диада и диадик*; впрочем, первое из этих двух слов употреблялось первоначально только для одного особенного ниже рассматриваемого случая.

Компоненты плоскостной величины (4) тоже можно рассматривать как коэффициенты некоторого преобразования, а именно, одного из преобразований следующего вида:

$$\begin{aligned} \xi &= 1 \cdot x - c \cdot y + b \cdot z, \\ \eta &= c \cdot x + 1 \cdot y - a \cdot z, \\ \tau &= b \cdot x + a \cdot y + 1 \cdot z. \end{aligned} \tag{8}$$

Действительно, коэффициенты этой подстановки ведут себя, как нетрудно убедиться, по отношению к преобразованию прямоугольных координат так же, как и билинейные выражения (4). По причине характера структуры схемы коэффициентов формул (8) (симметрия относительно главной диагонали с *переменой знака*) определяемую ими величи-

ну называют также *антисимметричным тензором* [133]).

С геометрической точки зрения, как известно, формулы (7) допускают истолкование в смысле общей однородной деформации, формулы (6) — в смысле чистой (без вращения) деформации, а формулы (8) — в *смысле бесконечно малого поворота.* Таким образом, тому формальному процессу, при помощи которого мы вывели (с. 233) из произведений координат (1) симметричный тензор (3) и антисимметричный тензор (4), в наглядном представлении соответствует *разложение однородной бесконечно малой деформации на чистую деформацию и поворот.*

До сих пор мы ограничивались при замене системы координат одними только ортогональными преобразованиями. Остается дать некоторые дополнительные указания, относящиеся к тому случаю, когда переходят от прямоугольной системы координат к косоугольной или когда вообще с самого начала вводят ξ, η, τ; x, y, z как косоугольные декартовы координаты. (Ограничение, требующее неподвижности начала координат, остается и здесь в силе.) Этим мы переходим от геометрии главной группы к геометрии аффинной группы. Изучение поведения коэффициентов подстановки (7) для этой группы по отношению к преобразованиям координат показывает, что хотя они тоже изображают компоненты некоторой геометрической величины, но они преобразуются не так, как произведения координат (1), но *контрагредиентно* по отношению к ним. Аналогично обстоит дело с коэффициентами преобразований (6) и (8). Можно показать, что один и тот же тензор (например, одна и та же однородная деформация) может быть задан по отношению к некоторой системе координат как посредством компонент вида (1), так и при помощи компонент вида коэффициентов подстановки (7). Первые называют «когредиентными», а последние «контрагредиентными» компонентами тензора. Вместо «когредиентный» и «контрагредиентный» часто говорят еще «контравариантный» и «ковариантный». Различие между обоими видами компонент такое же, как между точечными и плоскостными координатами.

Другое истолкование значения слова «тензор»,

существенно более общее по сравнению с тем его значением, которому мы отдали предпочтение, станет понятным, если сначала исследовать поведение однородных форм по отношению к замене координат. На с. 211—212 мы уже провели это исследование (пользуясь несколько отличными обозначениями) для случая квадратичной формы

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + \ldots + a_{33}\tau^2.$$

Мы нашли, что коэффициенты a_{11}, a_{12}, ..., a_{33} этой формы испытывают линейно однородное и контрагредиентное преобразование по отношению к величинам ξ^2, $\xi\eta$, ..., τ^2, составленным из точечных координат. А эти последние преобразуются, как непосредственно видно, когредиентно к выражениям (3). Этот результат можно высказать в такой форме: коэффициенты a_{11}, a_{12}, ..., a_{33} квадратичной формы являются контрагредиентными, а члены ξ^2, $\xi\eta$, ..., τ^2 — когредиентными компонентами некоторого симметричного тензора. Аналогично обстоит и с любой билинейной формой. О ней говорят по примеру Гиббса, что она определяет, в частности, некоторую *диаду*, если удается записать ее в виде произведения двух линейных форм. Имея *однородную полилинейную форму* точечных координат, можно с помощью несложного вычисления показать, что ее коэффициенты тоже подвергаются однородной и линейной подстановке, а именно, контрагредиентно по отношению к соответственным точечным координатам.

Обобщение понятия тензора, о котором мы только что говорили, состоит в том, что всякую подобную величину называют тензором и применяют это название не только в связи с билинейными формами, как это мы делали до сих пор. В этом общем значении слово «тензор» стали применять, в частности, Эйнштейн и его ученики. Прежде вместо этого говорили о линейных, квадратичных, билинейных, трилинейных, кубических и т. п. *формах*.

К различению терминов на практике присоединяется еще стремление обозначать систему компонент какого-нибудь тензора *одною только* буквою и указывать вычисления с тензорами посредством символического сочетания таких букв, стоящих рядом друг с другом. Все эти вещи сами по себе очень просты

и затрудняют читателя только по той причине, что разные авторы пользуются различными способами обозначений. Здесь мы встречаемся в еще большей степени с теми же неудобствами, которые мы уже отмечали в связи с векторным исчислением и которые, по-видимому, невозможно совершенно устранить. Но мы не могли не упомянуть об этих неудобствах, так как вся современная литература страдает от них.

Включение основных понятий метрической геометрии в проективную схему. Теперь я перейду к *метрической геометрии*, причем и здесь я приведу только несколько характерных примеров. Я покажу, как можно вывести из систематики теории инвариантов оба важнейшие основные понятия: «расстояние r между двумя точками $x=\frac{\xi_1}{\tau_1}$ и $x_2=\frac{\xi_2}{\tau_2}\ldots$» и «угол ω между двумя плоскостями $\alpha_1, \ldots, \delta_1$ и $\alpha_2, \ldots, \delta_2$».

Согласно известным формулам аналитической геометрии имеем

$$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{(\xi_1\tau_2-\xi_2\tau_1)^2+(\eta_1\tau_2-\eta_2\tau_1)^2+(\zeta_1\tau_2-\zeta_2\tau_1)^2}{\tau_1^2\tau_2^2}},$$

$$\omega=\arccos\left(\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\left(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2\right)\left(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2\right)}}\right).$$

Это — алгебраические, соответственно трансцендентные функции параметров; мы будем вправе обозначать их названием *алгебраические*, соответственно *трансцендентные*, *инварианты*, если мы покажем, что те рациональные составные части, из которых они построены, уже сами по себе являются инвариантами в прежнем смысле слова.

Начнем с *угла* ω. Та фигура, инвариантом которой он должен быть, состоит из двух линейных форм

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \delta_1; \quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \delta_2,$$

и из квадратичной формы в плоскостных координатах, изображающей окружность сфер:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+0\cdot\delta^2.$$

Из этой квадратичной формы в плоскостных координатах мы можем, конечно, образовывать инварианты точно таким же образом, как раньше (с. 218—219) из форм в точечных координатах, но только обменивая («дуализируя») каждый раз точечные и плоскостные координаты. В частности, оказываются инвариантными значения формы для обеих заданных систем значений

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2+0\cdot\delta_1^2,\qquad \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2+0\cdot\delta_2^2,$$

как и образованное для этих двух систем значение их полярной формы

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2+0\cdot\delta_1\delta_2,$$

т. е. те значения, из которых как раз и составляется фактически $\cos\omega$. Впрочем, $\cos\omega$ оказывается *однородным инвариантом нулевого измерения* относительно каждой из двух систем значений $\alpha_1, \ldots, \delta_1$ и $\alpha_2, \ldots, \delta_2$, а также относительно коэффициентов 1, 1, 1, 0 заданной квадратичной формы, так что это выражение имеет в метрической геометрии самостоятельное значение. Ведь фактически в метрической геометрии имеется абсолютная мера углов, не зависящая от произвольного выбора единицы измерения. Этим одновременно сказано, что наше выражение является *абсолютным инвариантом*.

Что же касается, далее, расстояния r, то следует вспомнить, что мы составляли инварианты квадратичной формы в точечных координатах путем окаймления ее определителя координатами одной из двух плоскостей (с. 219—220). Таким же образом мы и теперь получим инварианты для нашей фигуры, которая состоит из квадратичной формы в плоскостных координатах и из двух точек; для этого мы, поступая в точности взаимным (дуальным) образом, окаймляем определитель формы $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+0\cdot\delta^2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

один или два раза кординатами $\xi_1, \ldots, \tau_1$ и $\xi_2, \ldots, \tau_2$ данных точек. Из полученных таким образом

инвариантов составляем частное

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_1 & \tau_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} : \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_1 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_2 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 \end{vmatrix} \right\}.$$

Вычисляя эти три определителя, нетрудно найти, что это частное в точности равно вышеуказанному значению, чем и доказывается его инвариантная природа. Впрочем, подобно ранее рассмотренному фундаментальному инварианту аффинной геометрии, это частное, конечно, является однородным нулевого измерения относительно координат обеих точек, но не по отношению к коэффициентам заданной квадратичной формы, относительно которых оно оказывается однородным измерения — 4. К тому же оно не представляет собой абсолютного инварианта, так как каждый из трех входящих в его состав определителей имеет вес $+2$, так что частное имеет вес $2-4=-2$. Вследствие этого числовое значение r само по себе не имеет в метрической геометрии непосредственного значения, и действительно, к измерению расстояния двух точек можно приступить лишь после того, как еще один отрезок (единица) произвольно фиксирован, иными словами, дополнительно присоединен к фигуре наряду с фундаментальной квадратичной формой[134]). Абсолютные инварианты метрической геометрии могут быть изображены только с помощью отношений (частных), составленных из выражений указанного вида.

Здесь я тоже не имею возможности входить в рассмотрение дальнейших подробностей, но эти примеры дадут вам, по крайней мере, приблизительное представление о том, как выглядит возникающая здесь полная систематика аффинной и метрической геометрии, вырастающая из систематической классификации целых рациональных инвариантов.

Проективная трактовка геометрии треугольника. Я хотел бы коснуться еще одного маленького примера; я имею в виду так называемую *геометрию треугольника.* Здесь с течением времени возникла большая замкнутая область, в особенности благодаря трудам

ряда учителей гимназий, трактующая о многих *замечательных точках, прямых, окружностях,* которые можно определить в треугольнике: центр масс, высоты, биссектрисы, вневписанные окружности, описанная окружность, окружность Фейербаха и т. д. Бесчисленные соотношения, которые всегда снова и снова старались здесь найти и теперь еще стараются находить, очень легко можно увязать с нашей систематикой: даются три точки ξ_1, η_1, τ_1; ξ_2, η_2, τ_2; ξ_3, η_3, τ_3 на плоскости (рис. 102) в качестве вершин треугольника, и так как речь идет исключительно о метрических соотношениях, мы к ним присоединяем обе *мнимые циклические точки,* выражаемые в координатах прямой уравнением $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ (впрочем, мы могли бы попросту присоединить значения 1, i, 0 и 1, $-i$, 0 их точечных координат). Тогда *вся геометрия треугольника* оказывается не чем иным, как *проективной теорией инвариантов этих пяти точек,* т. е в конце концов пяти произвольных точек на плоскости, две из которых, однако, словесно выделяются (особыми терминами). Только благодаря этому замечанию геометрия треугольника приобретает характер прозрачной систематической дисциплины, которого иначе в ней не замечают.

•1 ×(1, i, 0)
•3
•2 ×(1, −i, 0)

Рис. 102

На этом я заканчиваю обзор систематики геометрии. Несомненно, что размещение всех этих вещей описанным здесь образом доставляет эстетическое удовлетворение, а так как к тому же только такая систематика позволяет достичь более глубокого понимания геометрии, то, конечно, каждый математик, каждый кандидат на учительскую должность должен быть знаком с ней. Вот почему мне казалось необходимым включить ее в этот курс, тем более, что вам и без того часто придется встречаться в литературе с таким пониманием геометрии, хотя и не всегда, быть может, в столь последовательном изложении. Конечно, было бы прямым извращением нашей мысли, если бы кто-нибудь захотел догматически связывать себя этой систематикой и всегда изображать геометрию только в такой схеме, ибо тогда она очень скоро на-

скучила бы и потеряла бы всякую прелесть и прежде всего помешала бы новому творческому мышлению, которое всегда развивается независимо от всякой систематики. Если изложенные выше рассуждения касались как бы архитектуры геометрического здания, то теперь мы обратимся к его не менее важным основаниям.

II. ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Общая постановка вопроса; связь с аналитической геометрией. Исследования, связанные с основаниями геометрии, во многих случаях сталкиваются с интересами теории познания и психологии, которые сами исследуют вопрос о том, как возникает пространственная интуиция, и о том, вправе ли мы пользоваться математическими методами для ее изучения.

Конечно, здесь мы можем затронуть эти вопросы лишь совершенно вскользь, а главным образом будем изучать *математическую сторону проблемы*, рассматривая при этом пространственную интуицию как нечто данное. В частности, мы должны будем оставить в стороне также и столь важный для педагогики вопрос о том, как у отдельного индивидуума пространственная интуиция развивается в ту строгую форму, к которой привыкли мы как математики.

Будучи так ограничена, наша задача заключается в том, чтобы *возвести все здание геометрии на возможно более простом основании при помощи логических операций.* Конечно, чистая логика не может дать нам этого основания; логическая дедукция может начать функционировать лишь с того момента, когда решена *первая часть* проблемы, т. е., *когда уже обладают системой некоторых простых основных понятий и некоторых простых предложений, так называемых аксиом, которая учитывает простейшие факты нашей интуиции.* Разумеется, эти аксиомы можно в зависимости от вкуса расчленять более или менее детально на отдельные взаимно независимые составные части, да и в других отношениях при их выборе имеется еще большая доля свободы. Ведь единственное условие, которому должна удовлетворять система аксиом, дается *второй частью* нашей задачи: *упомянутые основные понятия и аксиомы должны быть такими, чтобы из них можно было вывести логически все*

содержание геометрии, не обращаясь далее к интуиции.

Что касается способа трактовки этой задачи, то весь уклон нашего курса указывает на определенный характерный путь. До сих пор мы ведь постоянно пользовались принципиально помощью анализа, в частности, методами аналитической геометрии. Так и здесь мы снова будем предполагать известным анализ и зададимся лишь вопросом, как можно наикратчайшим образом от той или иной системы аксиом прийти к исходным моментам аналитической геометрии. К сожалению, эта простая формулировка применяется очень редко по той причине, что геометры часто относятся к применению анализа с некоторой пугливостью и насколько возможно стараются обходиться без чисел.

О построении проективной геометрии с последующим присоединением к ней метрической. Намеченную в общих чертах программу можно осуществить различными путями в зависимости от того, какие именно основные понятия и аксиомы желают выдвинуть на первое место. Часто практикуется — и это представляет известные удобства — ставить во главу всего исследования основные понятия проективной геометрии, а именно, точку, прямую и плоскость, которые мы уже раньше (с. 91—92) выдвинули в такой роли. При этом отнюдь не требуется давать определение того, что это за вещи, — это каждый должен знать заранее сам; должно быть лишь указано столько характерных для них свойств и взаимных соотношений, чтобы из них можно было вывести (в уточненном выше смысле) всю геометрию. Я не собираюсь перечислять здесь перед вами полностью отдельные сюда относящиеся аксиомы — это завело бы нас слишком далеко в сторону в этом нашем энциклопедическом курсе, а дам лишь настолько полную характеристику их содержания, чтобы вы получили о них ясное представление.

На первом месте стоят *аксиомы соединения*, которые я уже (с. 91) изложил для проективной геометрии. Однако здесь мы не требуем с самого начала, как это делали там, не допускающего исключений существования точки пересечения всяких двух прямых, лежащих в одной плоскости, или прямой пересечения всяких двух плоскостей, но в соответствии с непосредственными соотношениями метрической и аффинной

геометрии ограничиваемся тем положением, что *две прямые на плоскости либо имеют одну общую точку, либо не имеют таковой вовсе* и что *две плоскости либо имеют общую прямую, либо не имеют ни одной общей точки*. После этого всегда остается еще возможность перейти известным образом путем дополнительного присоединения «несобственных» точек, прямых и плоскостей к полной системе проективной геометрии.

Далее идут аксиомы расположения; они описывают, какое взаимное положение могут занимать на плоскости и на прямой различные точки; например, из трех точек a, b, c на одной прямой всегда одна какая-нибудь, например b, лежит между двумя другими a и c и т. д.; эти аксиомы называют также *аксиомами понятия* «между» (рис. 103).

Рис. 103

Наконец, что касается *свойств непрерывности*, то здесь я отмечу пока лишь отсутствие пробелов у прямой: если отрезок между двумя точками a, b разделить как-либо на две части *1*, *2* таким образом, чтобы (если a лежит слева от b) все точки части *1* лежали слева от всех точек части *2*, то всегда найдется такая точка c, которая вызывает это именно деление в том смысле, что между a и c лежат точки части *1*, а между c и b — точки части *2*. Это, очевидно, вполне соответствует введению иррациональных чисел при помощи дедекиндовых сечений *).

Из этих аксиом действительно можно вывести всю проективную геометрию пространства при помощи логической дедукции; в частности, конечно, можно ввести координаты и перейти к аналитической трактовке проективной геометрии [135]).

Чтобы перейти затем к *метрической геометрии*, надо прежде всего принять во внимание, что вместе с проективной геометрией мы получаем также понятие *группы* ∞^{15} *коллинеаций*, или проективных преобразований пространства. Мы уже знаем, как можно охарактеризовать в качестве ее подгруппы 7-параметрическую главную группу пространственных преобразований — ту группу, теорией инвариантов которой и является метрическая геометрия: эта группа состоит из

*) Ср. т. 1, с. 52—54.

тех коллинеаций, при которых некоторая плоскость, а именно *бесконечно удаленная плоскость*, и на ней некоторая кривая второго порядка, а именно *окружность сфер* (или соответственно изображающая ее *абсолютная полярная система*), остаются без изменения.

Приходится сделать еще один шаг дальше, если желательно получить в точности теоремы элементарной геометрии. Для этого должно выделить из главной группы 6-параметрическую *подгруппу собственных движений* (порожденную параллельными переносами и поворотами), которые в противоположность преобразованиям подобия оставляют неизменным расстояние между двумя точками и потому имеют своей теорией инвариантов метрическую геометрию конгруэнтности (равенства при наложении)[136]. Эти движения можно выделить из главной группы, например, с помощью требования, чтобы *все траектории любого движения были замкнуты*, если только оно оставляет неподвижной какую-нибудь точку.

Намеченное в таком виде построение геометрии является, пожалуй, *теоретически самым простым*, так как оно оперирует вначале (для проективной геометрии) исключительно линейными образами и лишь в дальнейшем, когда это становится необходимым для метрической геометрии, привлекает квадратичный образ — окружность сфер. Но зато осуществление этого плана оказывается довольно абстрактным и длинным и может найти место только в специальном курсе лекций по проективной геометрии.

Для целей общего преподавания мне представляется более подходящим другое построение геометрии, к которому я теперь и обращаюсь, ограничиваясь ради простоты *геометрией на плоскости*.

1. Построение геометрии на плоскости на основе движений

Построение аффинной геометрии, основанное на параллельных переносах. В качестве основных понятий принимаем *точку и прямую*, после чего вводим аксиомы *соединения, расположения и непрерывности*. При этом аксиомы соединения снова содержат лишь интуитивно ясные факты, как, например: *через любые две точки всегда проходит одна и только одна прямая*,

тогда как две прямые могут иметь либо одну общую точку, либо ни одной.

Относительно *расположения* точек на прямой мы сохраняем уже отмеченные выше требования; в процессе исследования нам еще придется остановиться на точной формулировке дальнейших аксиом расположения и аксиом непрерывности.

На этой основе мы теперь непосредственно, минуя проективные соответствия, введем *группу* ∞^3 *движения плоскости*, чтобы с ее помощью достигнуть нашей основной цели — построения системы аналитической геометрии на плоскости. Для этого мы должны прежде всего дать в виде ряда аксиом абстрактную формулировку того, какие именно свойства этих «движений» мы будем предполагать и применять по отношению к системе точек и прямых. При этом мы, конечно, ориентируемся на то наглядное представление о движении, которое мы вынесли из нашего опыта с твердыми телами. Согласно этому опыту движение должно в первую очередь быть взаимно однозначным преобразованием точек нашей плоскости (следовательно, должно, в частности, сопоставлять всякой точке некоторую точку, лежащую *в конечной части плоскости*) и, кроме того, должно переводить все без исключения прямые опять-таки в прямые. Представляется удобным для обозначения преобразования такого рода снова воспользоваться в общем случае словом *коллинеация*. Конечно, мы первоначально еще не знаем, существуют ли вообще подобные коллинеации, так как мы ведь не обладаем, как это было раньше, проективной геометрией. Поэтому мы должны явным образом постулировать в форме некоторой *новой аксиомы* существование этих специальных коллинеаций. Действительно, мы требуем, чтобы *существовала группа определенных* ∞^3 *(троекратно бесконечных) коллинеаций, которым мы даем название движений* и в качестве теории инвариантов которых следует рассматривать геометрию на плоскости. При этом необходимо также точнее охарактеризовать, что именно надо понимать под выражением «троекратно бесконечный» (или ∞^3). Пусть даны какие-нибудь две точки A, A' (рис. 104) и два луча (или полупрямые): луч a, исходящий из точки A, и луч a', исходящий из точки A'; *в таком случае всегда должно существовать одно и только одно движение,*

переводящее точку A в A' и одновременно луч a в a' [137]). Фигуры, переходящие при некотором движении одна в другую, мы называем *конгруэнтными*.

На первых порах мы не будем, однако, пользоваться существованием всей этой группы движений, а ограничимся использованием только одного особого класса движений, относительно которого мы теперь введем еще некоторые специальные постулаты. А

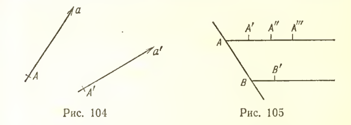


Рис. 104 Рис. 105

именно [138]), имеется одно и только одно движение, переводящее некоторую точку A в произвольно заданную точку A' и одновременно прямую, идущую от A к A' (с этим именно направлением), саму в себя; такое движение мы называем параллельным переносом. Так вот, мы требуем, чтобы вообще всякий такой перенос переводил в себя всякую прямую, соединяющую любые две взаимно соответствующие при этом переносе точки B и B', сохраняя ее направление (от B к B'); далее — и это самое главное — мы требуем, чтобы все ∞^2 параллельных переносов (двукратно бесконечное семейство) образовывали подгруппу по отношению к группе движений [139]).

Если повторять несколько раз один и тот же параллельный перенос (рис. 105), то A будет переходить в точки A', A'', A''', ... полупрямой AA', направленной от A к A'; приходится прибавить в качестве дальнейшего постулата, что эти точки могут в конце концов достичь либо перешагнуть любую точку этой полупрямой [140]). Путем повторения обратного преобразования получаем ряд точек такого же рода на другой полупрямой (т. е. на продолжении первой полупрямой AA' в противоположную сторону — за точку A). Представляя себе, что всякий параллельный перенос из начального положения в конечное мы выполняем непрерывным образом [141]), чем нам еще придется

воспользоваться, мы называем рассматриваемую здесь прямую *траекторией* точки A при этом переносе. Тогда всякая прямая представится нам траекторией бесконечно многих точек и для всякого переноса будет ∞^1 таких траекторий, а именно, тех прямых, которые при этом переносе переходят в себя.

Две различные траектории одного и того же параллельного переноса не могут пересекаться; действительно, ведь иначе точка пересечения должна была бы при переносе получаться из двух различных точек, а именно, лежащих по одной на каждой из траекторий, вопреки характеру переносного движения как взаимно однозначного точечного преобразования [142]). Всем траекториям одного и того же параллельного переноса даем название *взаимно параллельных прямых.* Таким образом, мы вводим это понятие, исходя из некоторого свойства наших движений. В то же время представляется очевидным, что через каждую точку A проходит хотя бы *одна прямая, параллельная* заданной прямой a, а именно, траектория точки A при параллельном переносе (плоскости) вдоль заданной прямой a.

Наконец, мы должны установить еще одну *последнюю аксиому* относительно этих переносов, а именно: *любые два параллельных переноса T', T'' обладают переместительным свойством*, т. е. получается одна и та же точка B как в том случае, если определенную точку A подвергнуть сначала переносу T', а затем переносу T'', так и в случае обратного порядка: подвергнуть A сначала переносу T'', а затем переносу T' (рис. 106); символически это записывается так [143]):

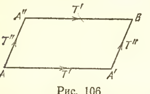


Рис. 106

$$T' \circ T'' = T'' \circ T'.$$

Позже мне придется еще остановиться несколько подробнее на вопросе о том, как вообще приходят к подобным аксиомам; здесь же я хотел бы лишь подчеркнуть, что наши вышеприведенные аксиомы выражают как раз то, что представляется вполне привычным каждому человеку уже с первых уроков геометрического черчения. Ведь первое, что делают, состоит

в перемещении твердого тела — линейки, циркуля или чего-либо подобного — из одного положения в другое, для того чтобы переносить величины расстояний и углов. В частности, часто применяют операцию параллельного переноса, заставляя, например, треугольник скользить вдоль линейки (рис. 107). При этом опыт подтверждает каждый раз, что все точки треугольника описывают параллельные прямые. Таким образом, наши допущения, которых мы не будем далее логически расчленять, не содержат в себе совершенно ничего искусственного.

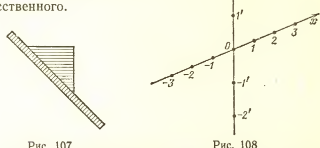


Рис. 107 Рис. 108

Посмотрим теперь, как далеко можно проникнуть в аналитическую геометрию, исходя из этих первоначальных понятий, относящихся к параллельным переносам. О прямоугольных координатах, конечно, не может быть и речи, так как мы до сих пор еще не имеем никакого опорного пункта для определения прямого угла, но зато можно ввести в общем виде декартовы координаты. Через некоторую точку O проводим две произвольные прямые, называя их осью x и осью y (рис. 108). Рассмотрим параллельный перенос T, переводящий точку O в произвольно выбранную точку *1* оси x. Тогда, повторяя несколько раз этот параллельный перенос T, получим из этой точки дальнейшие *точки 2, 3, 4*, ... на оси x.

При повторении таким же образом обратного параллельного переноса T^{-1}, определяемого тем, что он переводит *1* в O, точка O переходит поочередно в точки *—1*, *—2*, *—3*, ... оси x. Получаемым таким образом точкам приписываем положительные и отрицательные целые числа 0, 1, 2, ..., —1, —2, ... как их *абсциссы* x. Конечно, они не исчерпывают всех

точек оси x, но, согласно одному из наших постулатов [144]), расположены таким образом, что всякая иная точка (той же оси) заключается между двумя из этих точек.

Аналогичным образом, исходя из произвольного параллельного переноса T' вдоль оси y и выполняя его последовательно в том и в другом направлении (вперед и назад), получаем (исходя из точки O) *точки* $1'$, $2'$, $3'$, ..., $-1'$, $-2'$, $-3'$, ... оси y с положительными и отрицательными целочисленными координатами. При этом надо, разумеется, иметь в виду, что, определяя таким образом отрезки x и y на обеих осях, мы еще не можем сопоставлять их между собой, так как мы не вправе пока применять наряду с параллельными переносами также движение (поворот), переводящее ось x в ось y.

Теперь мы можем перейти также к *точкам оси x с действительными абсциссами*, сохраняя ранее выбранную единицу. Что касается прежде всего *рациональных точек*, то, чтобы выяснить вопрос на конкретном примере, мы будем искать в первую очередь такой параллельный перенос S вдоль оси x, который, будучи повторен дважды, дает как раз вышерассмотренный единичный параллельный перенос T. Тогда ту точку, в которую параллельный перенос S переводит точку O, мы отметим как точку $1/2$, а повторное применение переноса S даст нам точки $3/2$, $5/2$, ... Для доказательства существования такого параллельного переноса S и вместе с тем этих точек покажем прежде всего, что прямая от искомой точки $1/2$ оси x к точке $1'$ оси y должна быть параллельна прямой $1\ 2'$ (что соответствует известному построению, дающему деление отрезка на равные части). Действительно, рассматривая параллельный перенос S (рис. 109), переводящий O в искомую точку $1/2$,

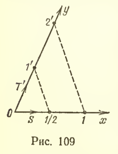


Рис. 109

как результат последовательного выполнения переносов T' из O в $1'$ и S' из $1'$ в точку $1/2$, можно двукратное повторение параллельного переноса S, что, согласно определению, тождественно с параллельным переносом T, заменить ввиду коммутативности любых двух

параллельных переносов последовательностью двукратно повторенного параллельного переноса T' и двукратно повторенного параллельного переноса S'. А так как двукратно повторенный параллельный перенос T' переводит O в $2'$, то этим показано, что 1 получается из $2'$ путем двукратного применения параллельного переноса S'. Итак, прямая $2'$ 1 является одной из траекторий параллельного переноса S' и как таковая действительно параллельна другой траектории того же параллельного переноса, идущей от $1'$ к $1/2$. Но ведь точки $2'$ и 1 нами уже были получены, так что параллельный перенос S' находится в нашем распоряжении. Поэтому однозначное построение точки $1/2$ на основании уже имеющихся элементов (как точки пересечения оси x и траектории точки $1'$ при этом параллельном переносе S') было бы обеспечено, если бы мы только знали, что эта траектория действительно пересекает ось x. Конечно, это не вызывает с точки зрения наглядных представлений ни у кого никаких сомнений, однако в рамках нашей аксиоматики такой вывод нуждается еще в одной особой аксиоме, так называемой *аксиоме взаимного расположения на плоскости.* Суть этой аксиомы состоит в том, что прямая, входящая внутрь треугольника через *одну* его сторону, должна снова выйти из него через *другую* сторону [145]) — тривиальный факт нашей геометрической интуиции, который однако приходится особо отмечать только по причине логической независимости этой аксиомы от других аксиом. Путем совершенно аналогичных рассуждений, очевидно, можно получить точку, соответствующую каждому рациональному значению абсциссы x; из наших постулатов нетрудно заключить также, что такие «рациональные точки» имеются внутри всякого (как угодно малого) отрезка оси абсцисс.

Но для того, чтобы действительно получить все точки, фактически рассматриваемые в геометрии, мы должны принять в расчет также и иррациональные абсциссы. А для этого нам нужен еще один тоже весьма наглядный постулат, представляющий лишь выше обещанное *уточнение требований непрерывности: должно существовать еще бесчисленное множество других точек на оси x (или соответственно параллельных переносов этой оси вдоль себя), которые находятся*

в таких же точно отношениях последовательности расположения и непрерывности к рациональным точкам, в каких иррациональные числа находятся к рациональным числам. Эта аксиома представляется тем более очевидной, что ведь, обратно, введение иррациональных чисел произошло исторически в результате обращения к геометрической непрерывности *).

В результате все точки оси x оказываются взаимно однозначно сопоставленными всем положительным и отрицательным действительным числам x; совершенно аналогично обстоит дело и с точками оси y.

Обращу ваше внимание на то, что описанный здесь прием построения шкалы на прямой представляется вполне естественным. Всякий, кому приходится строить шкалу, поступает так: перемещает вдоль линейки какое-нибудь твердое тело, имеющее согласно произвольному соглашению длину, равную одной единице (например, расстояние между остриями ножек циркуля), и затем делит получаемые таким образом отрезки на равные части.

Теперь мы в состоянии охарактеризовать каждый параллельный перенос плоскости вдоль оси x одним простым уравнением, дающим для каждой точки на оси x абсциссу ее нового положения $x' = x + a$, т. е. к x прибавляется рациональное или иррациональное, положительное или отрицательное число a. Подобно этому параллельный перенос вдоль оси y может быть описан уравнением

$$y' = y + b.$$

Рис. 110

Если выполнить (рис. 110) оба эти параллельных переноса один за другим (безразлично, в каком именно порядке, по причине переместительности параллельных переносов), то начало O перейдет в некоторую вполне определенную точку P; тогда говорят, что точка P имеет *абсциссу* a *и ординату* b. Но можно и, обратно, каждой точке P однозначным образом отнести два числа a и b; для этого достаточно произвести параллельный перенос, переводящий O в P, а затем

*) Ср. т. 1, с. 54—55.

определить абсциссу и ординату точек пересечения осей в их новых положениях, в которые они при этом переходят, с их первоначальными положениями. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие (или отображение) между совокупностью всех точек плоскости и совокупностью всех числовых пар (a, b), так что мы действительно получаем полное определение координат на плоскости. Остается только исследовать, как должно теперь выглядеть *уравнение прямой.* Рассмотрим сначала прямую, идущую от O к $P(a, b)$; она должна, очевидно, содержать все те точки, которые получаются при повторении параллельного переноса, переводящего O в P, т. е. точки

$$x = \lambda a, \quad y = \lambda b$$

с целочисленным λ. Затем мы замечаем, что и все точки, определяемые этими уравнениями при рациональном и, наконец, при иррациональном λ, должны лежать на той же прямой, но что, с другой стороны, этим исчерпываются все ее точки [146]). Таким образом, исключение параметра λ приводит уравнение прямой к такому виду:

$$x : y = a : b$$

или

$$bx - ay = 0.$$

Поэтому всякое уравнение вида

$$\alpha x + \beta y = 0$$

тоже изображает прямую, проходящую через O, если только α, β не обращаются одновременно в нуль. Но ведь любую прямую можно получить из подходяще выбранной прямой, проходящей через O, путем параллельного переноса, из чего мы окончательно заключаем, что *совокупность всех прямых изображается совокупностью всех уравнений первого порядка*

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

которые носят название *линейных уравнений.*

Из того, что прямая изображается линейным уравнением, без труда получается методами аналитической геометрии значительная часть геометрических теорем. Не входя в детали, отмечу лишь, что таким образом можно вывести всю *аффинную геометрию*, а вместе с тем также и всю *проективную геометрию.* Этих результатов мы достигаем, таким образом, на основе

одних только специальных постулатов, относящихся к подгруппе ∞^2 параллельных переносов.

Остановлюсь еще только на одном факте, который понадобится нам в дальнейшем. Мы доказали раньше при помощи теорем проективной геометрии *предложение Мёбиуса*, согласно которому *всякая коллинеация является проективным преобразованием*, т. е. преобразованием, которое изображается дробно-линейными или соответственно целыми линейными подстановками координат. Но ведь согласно нашему первоначальному допущению [147]) движения представляют собой коллинеации, при которых каждой точке, находящейся на конечном расстоянии, соответствует также не бесконечно удаленная точка, а с другой стороны, мы теперь уже построили всю проективную геометрию, и поэтому с нашей теперешней точки зрения предложение Мёбиуса также имеет силу. *В результате мы получаем, что каждое движение необходимым образом изображается целым линейным преобразованием только что введенных декартовых координат x, y.*

Привлечения поворотов к построению метрической геометрии. Если мы теперь пожелаем проникнуть дальше в область метрических понятий геометрии, в частности установить понятия *угла* между двумя прямыми и *расстояния* между любыми двумя точками (до сих пор мы могли говорить только о расстоянии между двумя точками, лежащими на оси x или на оси y), то нам придется заняться *полной группой движений*.

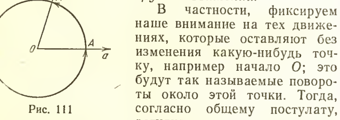


Рис. 111

В частности, фиксируем наше внимание на тех движениях, которые оставляют без изменения какую-нибудь точку, например начало O; это будут так называемые повороты около этой точки. Тогда, согласно общему постулату, регулирующему определение движения, должен существовать *в точности один поворот, который переводит полупрямую a, исходящую из точки O, в любую другую полупрямую a′, тоже исходящую из O* (рис. 111). Эти повороты являются в некотором смысле *двойственными* или *взаимными* по отношению к параллельным переносам, так как они

оставляют без изменения некоторую точку подобно тому, как параллельные переносы переводят в себя некоторую прямую. По аналогии с параллельными переносами мы будем представлять себе все повороты также совершающимися непрерывно, исходя из начального положения, и снова будем говорить о *траекториях*, которые при этом описывает каждая точка.

Однако между поворотами и параллельными переносами имеется существенное различие, которое мы должны тоже четко формулировать в виде особого постулата [148]): *полупрямые* a', a'', …, *получаемые из полупрямой* a *при повторении одного и того же поворота около* O, *должны в конце концов либо достичь, либо перегнать всякую полупрямую, выходящую из* O (в то время как параллельный перенос давал только точки одной полупрямой). Поэтому, в частности, непрерывное вращение должно в конце концов вернуть полупрямую a в ее начальное положение, причем и каждая точка A должна вернуться в свое начальное положение: траектории представляют собой поэтому замкнутые линии, пересекающие каждую полупрямую, исходящую из O, в одной и только одной точке A, так что все отрезки OA оказываются взаимно конгруэнтными (т. е. могут быть переведены один в другой с помощью движения); таким образом, эти траектории являются тем, что обычно называют окружностями *с центром* O.

Теперь мы фиксируем в пучке лучей, исходящих из O, с помощью этих поворотов некоторую *шкалу* совершенно подобно тому, как мы раньше строили шкалу на прямой с помощью параллельных переносов, причем тогда нам приходилось еще принять подходящее *допущение относительно непрерывности*. Я не стану входить здесь в детали всего этого и отмечу лишь как результат, что в конце концов с каждым поворотом оказывается сопоставленным некоторое действительное число — *угол этого поворота*, причем и, обратно, каждое действительное число оказывается углом некоторого поворота. Новым моментом является, конечно, здесь *периодичность* поворота, и поэтому представляется целесообразным избрать в качестве единицы как раз *полный оборот*, переводящий какой-нибудь, (и вместе с тем и каждый!) луч снова в себя. Однако, согласно традиции, *за единицу* принимают

поворот в *одну четверть полного оборота*, который, будучи повторен четыре раза, дает полный оборот, и угол этого поворота называют *прямым углом* R. Тогда всякий поворот может быть измерен его углом ωR, где ω может изображать любое действительное число, которое можно ограничить благодаря периодичности интервалом значений от нуля до четырех (рис. 112).

Подобным же образом можно определить шкалу углов в пучке лучей с любым другим центром O_1, но вместо этого можно *непосредственно перенести* при помощи соответственного параллельного переноса

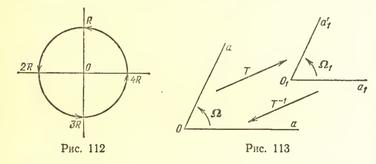


Рис. 112 Рис. 113

шкалу углов из O в O_1. А именно, если даны полупрямые a_1 и a_1', исходящие из O_1 (рис. 113), и если T представляет собой параллельный перенос, переводящий O в O_1, то назовем буквами a, a' те лучи, исходящие из O, в которые переходят лучи a_1, a_1' при выполнении обратного параллельного переноса T^{-1}; если Ω представляет собой поворот около O, переводящий a в a', то поворот Ω_1 около O_1, переводящий a_1 в a_1', может быть получен путем последовательного выполнения движений T^{-1}, Ω, T или в непосредственно понятной символике [149])

$$\Omega_1 = T \circ \Omega \circ T^{-1}.$$

Действительно, правая часть этого равенства тоже изображает движение, переводящее O_1, a_1 в O_1, a_1', а такое движение представляется однозначно определенным. И вот мы приписываем повороту Ω_1 такой же угол ωR, какой имеет поворот Ω согласно данному

выше определению. Если дан какой-нибудь другой поворот Ω' в пучке O, то в пучке O_1 ему соответствует поворот $\Omega_1' = T \circ \Omega' \circ T^{-1}$, а композиция обоих поворотов Ω_1 и Ω_1' равна

$$\Omega_1' \circ \Omega_1 = T \circ \Omega' \circ T^{-1} \circ T \circ \Omega \circ T^{-1} = T \circ (\Omega' \circ \Omega) \circ T^{-1};$$

таким образом, она соответствует композиции поворотов Ω и Ω'.

Из этого следует, что наш перенос действительно устанавливает при O_1 ту же самую шкалу, какую дало бы повторение прямого приема.

У Евклида имеется теорема, которая перешла в большинство наших элементарных учебников, а именно: *все прямые углы конгруэнтны между собой;* каждый учащийся, конечно, готов считать это положение самоочевидным, и я полагаю, что в школе действительно можно умолчать о нем, так как все равно школьник не в состоянии постичь заключенной в нем идеи. Но его действительный смысл в точности совпадает с содержанием наших последних рассуждений, а именно: равные углы, определенные с помощью поворотов около различных точек, можно привести к взаимному наложению с помощью движений, другими словами, они конгруэнтны между собой.

Установив таким образом, общее определение угла, мы теперь дадим также определение *расстояния между любыми двумя точками,* тогда как до сих пор мы могли сравнивать только расстояния на одной и той же прямой при помощи параллельных переносов. Если расстояние r отложено, например, от O по оси x, то мы можем (рис. 114) перенести его с помощью поворота около O на всякую другую прямую a', проходящую через O; таким образом можно вообще всю шкалу длин на оси x перенести на a', а затем с помощью параллельного переноса на всякую другую прямую, параллельную a', и, следовательно, вообще на любую прямую. В результате мы действительно получаем возможность измерять расстояние между какими угодно двумя точками, соединяя *эти точки прямой* и перенося на нее описанным способом масштаб с оси x.

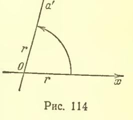


Рис. 114

В частности, таким приемом можно построить масштаб на оси y (который мы вначале считали самостоятельно установленным), исходя из масштаба на оси x.

Теперь мы пополним наш аппарат *аналитической геометрии* этим новым понятием поворота. При этом мы будем пользоваться — на что мы теперь имеем право — вместо общих декартовых координат специальными прямоугольными координатами x, y (рис. 115).

Рис. 115

Мы уже знаем (с. 256), что всякое движение изображается некоторой линейной подстановкой переменных x, y:

$$x' = (a_1 x + b_1 y + c_1)/N,$$
$$y' = (a_2 x + b_2 y + c_2)/N.$$

Так как эта подстановка переводит всякую конечную точку снова в конечную, то знаменатель N должен быть постоянным, так что можно принять его равным единице. В частности, для поворота около O имеем $c_1 = c_2 = 0$, так что подстановка принимает такой вид:

$$x' = a_1 x + b_1 y, \quad y' = a_2 x + b_2 y. \qquad (1)$$

Для одного специального поворота, а именно, для поворота на прямой угол мы можем указать непосредственно точную форму этих уравнений. Дело в том, что для наших прямоугольных координат при таком повороте ось x переходит в ось y, а ось y — в отрицательную ось x, так что уравнения принимают такой простой вид [150]):

$$x' = -y, \quad y' = x. \qquad (2)$$

Теперь вопрос о нахождении формул поворота сводится к такой чисто аналитической задаче: требуется найти такую однократно бесконечную группу подстановок вида (1), которая содержала бы в себе подстановку (2) и для которой всякая подстановка группы, вообще говоря, получается путем ω-кратной итерации (повторения) из (2), где ω обозначает некоторый действительный параметр. В случае рационального $\omega = \frac{p}{q}$ это выражение (т. е. ω-кратную итерацию подстановки (2)) надо, конечно, понимать в том смысле, что искомая подстановка, будучи повторена q раз, дает как

раз результат p-кратно итерированной подстановки (1), тогда как иррациональные значения ω следует аппроксимировать рациональными значениями согласно постулатам непрерывности.

Следует уяснить себе, что здесь не следует предполагать знания каких бы то ни было геометрических фактов, касающихся, в частности, формул поворота прямоугольной системы координат, но зато мы вправе (и действительно хотим) без стеснения пользоваться сведениями из анализа. И хотя получаемое построение не может найти в такой форме непосредственного применения в школьном преподавании, зато оно принимает очень изящный и простой вид.

Отмечу прежде всего, что поворот (2) может быть записан при помощи *комплексных чисел одной* формулой

$$x' + iy' = i(x + iy). \qquad (2)$$

Отсюда сразу же заключаем, что дважды итерированная подстановка выразится так:

$$x' + iy' = i^2(x + iy),$$

т. е. посредством уравнения того же вида с той лишь разницей, что вместо i стоит i^2; точно так же при ω-кратной итерации в выше указанном смысле появляется множитель i^ω для каждого действительного ω. В результате получаем такое *аналитическое изображение поворота плоскости около O на угол* $\omega \cdot R$:

$$x' + iy' = i^\omega(x + iy). \qquad (3)$$

При точном проведении этого хода мыслей мы, конечно, должны воспользоваться из анализа полным знанием свойств показательной функции e^z, а также тригонометрических функций, связанных с нею посредством формулы Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

(не имея, однако, пока надобности в каких-либо представлениях об их геометрическом смысле)[151].

В таком случае мы знаем также число π из формулы

$$e^{i\pi} = -1;$$

тогда

$$i = e^{i\pi/2}.$$

А под i^ω всюду следует понимать значение, однозначно определенное такой формулой:

$$i^\omega = e^{\omega \frac{i\pi}{2}} = \cos \frac{\omega\pi}{2} + i \sin \frac{\omega\pi}{2}.$$

Подставив это значение в (3) и приравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$\begin{aligned} x' &= \cos \frac{\omega\pi}{2} \cdot x - \sin \frac{\omega\pi}{2} \cdot y, \\ y' &= \sin \frac{\omega\pi}{2} \cdot x + \cos \frac{\omega\pi}{2} \cdot y, \end{aligned} \qquad (4)$$

и это дает нам искомое изображение группы поворотов с помощью более элементарных аналитических символов.

В связи с этим результатом представляется целесообразным принять прямой угол не за единицу, а за угол $\pi/2$. Мы будем это называть *натуральной*[152]) *шкалой углов* подобно тому, как мы говорим о натуральном логарифме, желая этим отметить, что эти понятия имеют свое основание в самой природе вещей, хотя обнаружение этого и требует более глубокого проникновения. Пользуясь этой натуральной шкалой, будем вместо $\omega\pi/2$ писать просто ω *) и, таким образом, вместо (4) получаем в качестве формул поворота такие общеизвестные формулы:

$$x' = x \cos \omega - y \sin \omega, \quad y' = x \sin \omega + y \cos \omega. \quad (5)$$

Теперь нам следует заняться исследованием того, какие геометрические истины содержатся в этих формулах. Это будут все те элементарные теоремы, которые обычно предпосылают, чтобы затем из них вывести формулы (5).

1. Рассмотрим сначала точку оси x, находящуюся на расстоянии r от начала координат:

$$x = r, \quad y = 0.$$

Если повернуть эту точку на угол ω, то формулы (5) дают такие коодинаты ее нового положения:

$$x = r \cos \omega, \quad y = r \sin \omega; \qquad (6)$$

*) Формулы (4) соответствуют повороту на угол ωR, т. е. на $\omega\pi/2$ новых единиц, а при повороте на угол ω (новых единиц) надо в (4) вместо $\omega\pi/2$ написать всюду ω.

при этом ради краткости мы опускаем штрихи при координатах новой точки. Принимая для определенности $\omega < \frac{\pi}{2}$ и рассматривая прямоугольный треугольник (рис. 116), образуемый радиус-вектором r точки x, y, ее абсциссой x и ординатой y, замечаем, что формулы (6) дают соотношения между его сторонами и углом ω. Пользуясь соотношением $\cos^2\omega + \sin^2\omega = 1$, которое вытекает из тех аналитических определений этих функций, которые здесь положены в основу [153]), получаем из (6) непосредственно

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad (6a)$$

Рис. 116

что представляет собой *теорему Пифагора*, которая получается, таким образом, как следствие наших допущений относительно движений плоскости. Но мы можем переписать (6) еще и в таком виде:

$$\cos\omega = \frac{x}{r}, \quad \sin\omega = \frac{y}{r}, \qquad (6b)$$

и это дает то элементарное значение тригонометрических функций угла, которое обыкновенно принимают в качестве их определения: косинус и синус представляют собой отношения прилежащего и противолежащего катета к гипотенузе.

Вывод окончательных выражений для расстояния и угла.

2. Теперь нетрудно будет вывести общие аналитические выражения для основных понятий «расстояние» и «угол», переводя данные элементы (точки либо прямые) посредством параллельного переноса и поворота в только что рассмотренное специальное положение. Таким образом, для двух точек x_1, y_1 и x_2, y_2 находим

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Действительно, достаточно перевести с помощью параллельного переноса точку *2* в начало координат, чтобы, согласно формулам переноса, получить разности $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$ в качестве новых координат точки *1*, и тогда из формулы (6a) сразу получается наше выражение для r. Совершенно аналогично — я, конечно,

могу здесь не останавливаться на деталях — из (6b) *для угла* ω *между любыми двумя прямыми, выражаемыми уравнениями*

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \delta_1 = 0, \quad \alpha_2 x + \beta_2 y + \delta_2 = 0,$$

получаются следующие формулы [154]):

$$\cos\omega = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}},$$

$$\sin\omega = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}.$$

Введение общих понятий площади фигуры и длины кривой.

3. Наконец, мы должны также поговорить о *понятии площади*, которым нам до сих пор при нашем построении геометрии совершенно не приходилось еще пользоваться. Однако это понятие содержится, хотя в более или менее неточной форме, в наивном пространственном сознании каждого человека; всякий крестьянин знает, что означает фраза: участок земли имеет площадь столько-то квадратных метров. Поэтому, если мы полностью обосновали геометрию — и это действительно сделано в предшествующем, — не пользуясь этим основным понятием, то мы должны его все же присоединить теперь задним числом к нашей системе, другими словами, выразить его в координатах.

Здесь нам приходится начать с одного небольшого *геометрического соображения*, которое приблизительно в том же виде постоянно встречается у Евклида и в элементарных изложениях геометрии [155]). Имея прямоугольник со сторонами A, B, мы определяем в качестве его площади произведение AB. Соединяя, далее, в одно целое два прямоугольника или, вообще, две фигуры с известной площадью, получаем одну фигуру, площадь которой должна быть равна *сумме* чисел, выражающих площади взятых фигур; если же отрезать от прямоугольника или, вообще, от какой-либо фигуры меньшую фигуру, целиком в ней заключающуюся, то площадь остатка должна выражаться *разностью* чисел, выражающих площади обеих фигур (рис. 117).

Установив это, мы сразу приходим к определению *площади параллелограмма*. Параллелограмм полу-

чается из прямоугольника с тем же основанием и высотой путем отсечения некоторого треугольника и присоединения равного ему треугольника (рис. 118); поэтому его площадь равна площади названного прямоугольника и, следовательно, равна *произведению*

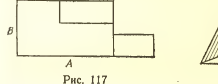


Рис. 117

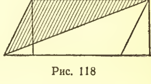


Рис. 118

основания на высоту [156]). Диагональ делит параллелограмм на два конгруэнтных треугольника, каждый из которых имеет поэтому площадью половину площади параллелограмма: *площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.*

Применяя это к треугольнику со сторонами r_1, r_2 и заключенным между ними углом ω, так что высота, опущенная на r_1, равна $r_2 \sin\omega$, находим для его площади выражение

$$\Delta = \frac{r_1 r_2 \sin\omega}{2}.$$

Помещая одну вершину этого треугольника (рис. 119) в начало координат и обозначая координаты других вершин через x_1, y_1, и x_2, y_2, мы легко можем пересчитать эту формулу с помощью указанных выше выражений для расстояний и для угла в такую формулу [157]):

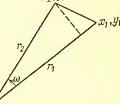


Рис. 119

$$\Delta = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}.$$

Легко убедиться в том, что повороты системы координат оставляют это выражение Δ без изменения, так что мы имеем в нем действительно некоторое «геометрическое понятие». Но чтобы установить инвариантность также при параллельных переносах, а следовательно, и при всех вообще движениях, надо подвергнуть одновременному преобразованию третью

вершину, т. е. установить формулу для площади треугольника, образованного любыми тремя точками x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; тогда получаем

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

и это как раз та формула, с которой мы начали наш курс (с. 10).

Легко проверить, что определенные таким образом площади треугольников при соединении треугольников в одно целое или при отсечении части от треугольника складываются или вычитаются; это сводится, как мы это уже видели ранее, к простым соотношениям между определителями.

Этим выполнено включение идеи площади в нашу систему аналитической геометрии, и в то же время мы приобрели нечто такое, что сначала не было еще в наивном представлении; площадь становится величиной, снабженной знаком. Я уже изложил подробно в самом начале этого курса (с. 10—14), какое преимущество достигается этим в отношении свободного оперирования с формулами и их не допускающей исключений приложимости по сравнению с наивным взглядом на площадь как на неотрицательную величину.

4. Дальнейшим примером понятия, содержащегося в более или менее точной форме в наивном представлении пространства, которое мы теперь должны дополнительно включить в нашу систему геометрии, является *понятие (произвольной) линии*. Каждый человек думает, что знает, что такое линия, покуда он не изучит настолько математику, что его собьют с толку бесчисленные возможные ненормальности.

Но здесь мы не станем входить в подробности и скажем просто, что под линией мы понимаем совокупность точек, координаты которых представляют собой непрерывные функции φ, χ параметра t, обладающие столькими производными, сколько требуется в каждом отдельном случае:

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t).$$

Это дает возможность сразу развить в рамках нашей аналитической геометрии все те понятия и

теоремы, которые обыкновенно объединяются названием *инфинитезимальной* (*дифференциальной*) *геометрии*, в том числе понятие *длины дуги кривой, площади* изогнутой *поверхности, кривизны, эволют* и т. д. Основная идея заключается в том, что кривую рассматривают как предел вписанной ломаной (рис. 120). Если две соседние точки имеют координаты x, y и $x + dx$, $y + dx$, то из пифагоровой формулы тотчас же следует такое выражение для длины дуги:

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

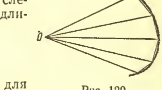


Рис. 120

и точно так же из формулы для площади треугольника с вершиной O сразу же получается уже ранее употреблявшаяся нами (с. 21) формула

$$\frac{1}{2} \int (x\,dy - y\,dx),$$

выражающая *площадь сектора*, заключенного между кривою и двумя радиус-векторами, проведенными из O [158]).

На этом я покидаю наш первый способ построения геометрии, который характеризуется тем, что мы на первое место выдвинули существование и расчленение трехпараметрической группы движений и вслед за тем сразу же ввели координаты, чтобы в дальнейшем иметь возможность перевести наши рассуждения целиком в область арифметики. Этому построению в известной мере противостоит другой способ обоснования геометрии; он тоже приводит непосредственно к метрической геометрии и с давних пор играл большую роль, поэтому я хочу остановиться и на нем подробнее.

2. Другое обоснование метрической геометрии; роль аксиомы параллельности

Расстояние, угол, конгруэнтность как основные понятия. Отличие этого обоснования по сравнению с первым построением заключается в том, что здесь *идея движения последовательно избегается* (либо

вводится лишь в дальнейшем в качестве дополнительного раздела). Если в древности (как и теперь еще) часто отдавали предпочтение такому именно порядку изложения, то это вызывалось, несомненно (хотя бы отчасти), философскими соображениями, о которых я хочу сказать здесь хоть несколько слов. Опасались того, что вместе с движениями в геометрию войдет чуждый ей элемент — время; и если, с одной стороны, пытались помещать на первый план движения, оправдывая это большой наглядностью идеи твердого тела, то, с другой стороны, на это возражали, что эта идея не только не имеет сама по себе точно уловимого смысла, но, как раз, наоборот, может быть обоснована лишь после того, как уже приобретено понятие расстояния. Конечно, на это эмпирист со своей стороны всегда может ответить, что в действительности абстрактная идея расстояния извлекается из наличия «достаточно» твердых тел.

А теперь разрешите мне указать вкратце основные мысли этого второго построения геометрии.

1) Здесь начинают, как и раньше, с введения *точек* и *прямых* и с предложений (аксиом), касающихся их *соединения*, *расположения*, *непрерывности*.

2) Но при этом вводят — и это здесь является новым — в качестве новых основных понятий, с одной стороны, *расстояние между двумя точками* (*длина отрезка*), а с другой — *угол между двумя прямыми* и устанавливают относительно них аксиомы, сущность которых заключается в утверждении того, что *отрезки и углы могут быть общеизвестным образом измерены посредством чисел.*

3) В качестве характерной (для второго построения) аксиомы, которая замещает, собственно говоря, аксиомы группы движений, здесь выступает *первое предложение о конгруэнтности треугольников: если две стороны и заключенный между ними угол одного треугольника равны соответственным элементам другого треугольника, то оба треугольника конгруэнтны*, т. е. все их соответственные элементы равны друг другу [159]). В нашей прежней системе это является доказуемым предложением; можно указать движение, которое приводит (рис. 121) сторону $A'B'$ к наложению на AB [160]); тогда в силу сделанного предположения сторона $A'C'$ тоже непременно совпадает с

AC и вообще треугольники окажутся совмещенными. Если же мы не включаем движения в число основных понятий и, следовательно, не можем их применять, то нет никакой возможности доказать эту теорему, и мы вынуждены постулировать ее как новую аксиому.

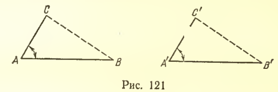


Рис. 121

4) При дальнейшем развитии идей поступают как раз обратно тому, что имело место при нашем первом построении, как это вам, конечно, известно. Элементарное преподавание геометрии следует, примыкая по существу к Евклиду, о котором позже мне придется еще подробно говорить, в точности этому (второму) пути. Сначала доказывают теорему Пифагора и затем вводят тригонометрические функции (косинус и синус) в связи с их ролью в учении о треугольниках, а отсюда уже приходят, наконец, к такому же аналитическому аппарату, как и раньше.

Аксиома параллельности и теория параллелей; неевклидова геометрия.

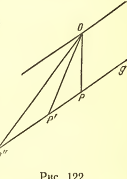


Рис. 122

5) При этом оказывается необходимым ввести еще одну особенно важную аксиому, относящуюся к *теории параллелей.* При нашем первом обосновании параллельность была одним из первых основных понятий, которое сразу же возникло при рассмотрении параллельных переносов: мы называли прямые линии параллельными, если они являлись траекториями (различных точек) при одном и том же параллельном переносе. Совершенно иначе обстоит дело здесь; среди до сих пор введенных основных понятий параллельность не встречалась, поэтому нам приходится теперь поговорить о ней в отдельности. А именно,

имея прямую g (рис. 122) и точку O вне g, соединяем O с точкой P, лежащей на g, и отодвигаем P в положения P', P'', ... и все дальше и дальше на g (иными словами, мы представляем себе последовательность точек P, P', P'', ... или соответственно последовательность прямых OP, OP', OP'', ... ; о движении же в прежнем смысле здесь не говорится). Прямая OP при этом вращении вокруг O, достигнет некоторого предельного положения, когда P удалится в бесконечность, и эту *предельную прямую мы и называем параллельной к g, проходящей через O.* При этом нет никакой априорной необходимости в том, чтобы прямая OP приближалась к *одному и тому же* предельному положению при удалении P в бесконечность как в одну, так и в другую сторону, что дает *абстрактную возможность существования двух различных прямых, проходящих через O параллельно прямой g.*

Поэтому для нашего теперешнего построения вводится *новая аксиома:* мы постулируем в согласии с нашей привычной интуицией, что эти два предельных положения всегда должны совпадать, иначе говоря, что через точку *O должна проходить только одна прямая, параллельная прямой g.* Это и есть та знаменитая *аксиома параллельности,* которая в течение ряда столетий вызывала столько споров; ее называют также *евклидовой аксиомой,* так как у Евклида она четко сформулирована в виде постулата [161]).

Прежде всего я должен сообщить вам кое-что, *касающееся истории этой аксиомы.* В течение долгого времени делались величайшие усилия, направленные к нахождению *доказательства* этой аксиомы (т. е. к выводу ее из предшествующих ей геометрических аксиом) и, конечно, всегда безуспешные. Эти усилия не прекратились и по сей день, и это вполне естественно: наука может прогрессировать как угодно далеко, и все же всегда найдутся люди, которые полагают, что они лучше понимают дело, и игнорируют результаты надежного точного исследования.

В действительности математика давно уже перешла от тех тщетных попыток к плодотворным новым исследованиям и положительным результатам. Уже в XVIII столетии возникает характерная новая, более широкая постановка вопроса: не является ли возмож-

ным построить логически последовательную, свободную от внутренних противоречий систему геометрии, которая воздерживалась бы от этой аксиомы параллелей и допускала бы существование *двух* различных предельных прямых в вышеуказанном смысле, т. е. двух различных параллелей к g, проходящих через O?

В начале XIX столетия математика оказалась в состоянии дать утвердительный ответ на этот вопрос; Гаусс первый открыл существование *неевклидовой геометрии* — так мы называем вместе с ним геометрическую систему указанного рода. Из литературного наследия Гаусса явствует, что он, несомненно, уже в 1816 г. имел точное представление о ней, но относящиеся сюда заметки были найдены лишь много позже и напечатаны в 1900 г. в восьмом томе «Собрания произведений Гаусса» *).

Сам Гаусс ничего не опубликовал, кроме немногих случайных высказываний, об этом своем великом открытии. Независимо от него неевклидову геометрию построил около 1818 г. юрист Швейкарт, назвавший ее *астральной* (*т. е. звездной*) *геометрией*. Он тоже не опубликовал своих исследований. Впервые о них узнали кое-что из одного письма, написанного Гауссу и найденного среди бумаг последнего. Первые опубликованные работы по неевклидовой геометрии написали русский геометр Н. И. Лобачевский (1829) и венгр Бояи младший (1832), которые оба нашли эти результаты независимо один от другого и обладали ими, насколько можно судить по имеющимся материалам, уже в 1826 г. и соответственно в 1823 г. В течение протекшего столетия эти вещи благодаря многим работам стали общим достоянием математиков, и в наши дни всякому образованному человеку приходилось слышать что-нибудь о существовании неевклидовой геометрии, хотя только специалист может достичь ясного ее понимания.

Существенно новое направление дал этим вопросам Риман в начале второй половины XIX столетия в лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», прочитанной в 1854 г. для получения права преподавания в университете. Риман замечает, что

*) Gauss C. F. Gesammelte Werke. — Bd. VIII. — Leipzig, 1900.

в основе всех предшествовавших исследований лежит *допущение того, что прямые имеют бесконечную длину*, которое является, конечно, крайне естественным. Но что получится, если все же отбросить это допущение, если, например, вместо него предположить, что прямые суть линии замкнутые, вроде больших кругов на сфере? Здесь речь идет *о различии между бесконечностью и безграничностью пространства*; это различие лучше всего можно понять, рассматривая аналогичное соотношение в двумерной области: безграничными[162]) являются как обыкновенная плоскость, так и поверхность сферы, но только первая бесконечна, тогда как другая имеет конечное протяжение.

Риман действительно считает пространство лишь *неограниченным*, но не *бесконечным;* тогда прямая становится замкнутой линией, на которой точки расположены, как на окружности. Если заставить теперь снова, как и прежде, точку P перемещаться по прямой g все время в одном направлении, то она в конце концов снова вернется к исходному месту, а луч OP вообще не будет иметь никакого предельного положения: *не существует вовсе прямой, проходящей через O параллельно прямой g.* Таким образом, у Римана мы встречаемся со вторым видом *неевклидовой геометрии* («НГ II» в противоположность неевклидовой геометрии Гаусса, Бояи и Лобачевского («НГ I»).

На первый взгляд это кажется парадоксальным, но математик сразу подмечает здесь *аналогию с обыкновенной теорией квадратных уравнений*, что указывает на путь к пониманию этих вещей. А именно, квадратное уравнение имеет либо два различных действительных корня, либо не имеет ни одного такого корня (но имеет зато два мнимых корня), либо, наконец, в качестве переходного случая имеет один двойной действительный корень. Это вполне аналогично двум различным действительным параллелям НГ I, отсутствию действительных параллелей в НГ II и, наконец, переходному (или промежуточному) случаю одной параллели в евклидовой геомметрии.

Философское значение неевклидовой геометрии. Прежде чем приступить к более точному математическому рассмотрению неевклидовой геометрии, я

хочу хотя бы вкратце коснуться ее большого философского значения, благодаря которому она всегда встречала со стороны философов живой интерес, часто сопровождаемый резко отрицательным отношением.

Прежде всего эта дисциплина дает ответ на вопрос о том, какой *характер* имеют *геометрические аксиомы*, рассматриваемые с точки зрения чистой логики. А именно, из самого факта существования неевклидовой геометрии можно непосредственно заключить, что евклидова аксиома отнюдь не является следствием предпосланных ей основных понятий и аксиом и не имеется ничего такого, что логически понуждало бы нас к ее принятию. Действительно, заменяя ее противоречащим ей допущением и сохраняя неизменными все прочие аксиомы, мы не только не приходим ни к какому противоречию, но получаем неевклидову геометрию в качестве дисциплины, столь же безупречной логически, как и евклидова геометрия. Таким образом, *та особенность нашего представления о пространстве*, описание которой дает аксиома параллельности, во всяком случае, не является чисто логической необходимостью.

Но в таком случае спрашивается: нельзя ли разрешить вопрос об истинности аксиомы параллелей с помощью *чувственной интуиции*? И по этому вопросу неевклидова геометрия тоже дает важные указания, а именно: *безусловно неверным является мнение, будто непосредственное чувственное восприятие учит нас существованию в точности одной параллели.* Дело в том, что наше восприятие пространства отнюдь не обладает абсолютной точностью и что и здесь, как и во всякой другой области чувственного восприятия, мы не в состоянии воспринимать как различные те величины (отрезки, углы и т. д.), разность между которыми лежит ниже известного предела, так называемого порога. В частности, если через точку O провести две прямые чрезвычайно близко одну к другой (рис. 123), то мы наверное не будем в состоянии различить их между собой, если только угол между ними будет достаточно мал, например равен $1''$ или, если угодно, $\frac{1}{1000}''$, или еще меньше. Поэтому представляется затруднительным вывести из непосредст-

венного созерцания заключение о том, проходит ли через O действительно одна и только одна параллель к g или же две, но отстоящие одна от другой всего лишь на такой незначительный угол. Мы почувствуем это еще яснее, если представим себе, что O лежит невероятно далеко от g, скажем на расстоянии от Сириуса до Земли или даже в миллионы раз дальше. При таких расстояниях чувственное созерцание совершенно теряет ту остроту, которую вообще считают свойственной ему, и наши глаза абсолютно неспособны различить, имеется ли одна или две параллели к данной прямой g сответственно определению параллели как предельного положения вращающегося луча.

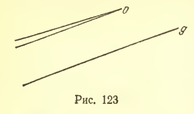


Рис. 123

С этим положением вещей неевклидова геометрия первого рода мирится фактически так же хорошо, как и евклидова. Как вы увидите еще яснее из тех математических формул, которые я сейчас сообщу, неевклидова геометрия первого рода содержит одну произвольную постоянную; оперируя ею надлежащим образом, можно сделать угол между обеими параллелями к g, проходящими через умеренно удаленную от g точку O, как угодно малым, и только по мере удаления точки O от g этот угол будет приобретать все более заметную величину [163].

Таким образом, поскольку верно то, что наше восприятие пространства охватывает только ограниченную его часть и притом с ограниченною точностью, наше восприятие может быть удовлетворено сколь угодно точно посредством некоторой НГ I.

Но совершенно аналогично обстоит дело и с НГ II. Необходимо только отдать себе отчет в том, что бесконечная длина прямых тоже не является обязательным выводом из непосредственного чувственного созерцания.

Мы можем проследить всякую прямую только в пределах некоторой конечной части пространства, поэтому мы не впадем в противоречие с нашими восприятиями, если скажем, что прямая имеет хотя и невероятно большую, но все же конечную длину, быть

может, равную нескольким миллионам или даже еще большему числу расстояний до Сириуса; фантазия может, конечно, придумывать здесь сколь угодно большие числа, выходящие за пределы всякой возможности непосредственного созерцания. *Ввиду этих соображений можно как угодно точно представить геометрические отношения во всякой ограниченной части пространства также и посредством НГ II (тоже содержащей произвольный параметр).*

Затронутые здесь логические и интуитивные факты, изложенные так, как они прдставляются с точки зрения математики, идут, конечно, в высокой степени вразрез с тем ортодоксальным пониманием пространства, которое многие философы связывают с именем Канта и согласно которому все теоремы геометрии должны иметь абсолютную силу. Этим объясняется, почему неевклидова геометрия вызвала столько раздражения и сопротивления в этих философских кругах с самого начала их знакомства с нею.

Включение неевклидовой геометрии в проективную схему. Обращаясь, наконец, к *собственно математической трактовке неевклидовых геометрий,* мы сделаем лучше всего, если выберем путь, ведущий через проективную геометрию; этот прием я указал в 1871 г.

Мы представляем себе проективную геометрию, построенную независимо от всякой метрики, исходя из основных понятий «точка, прямая, плоскость», с помощью относящихся к ним аксиом соединения, расположения и непрерывности таким именно образом, как я вкратце наметил в начале этих рассуждений об основаниях геометрии (с. 245—247). В частности, будем считать, что введены также точечные координаты x, y, z или в однородном виде $\xi : \eta : \zeta : \tau$, а также плоскостные координаты $\alpha : \beta : \gamma : \delta$, так что взаимная принадлежность (инцидентность) точки и плоскости записывается билинейным уравнением

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta\tau = 0.$$

На этой основе мы получили раньше *обычную евклидову геометрию* при помощи теории инвариантов и принципа Кэли, присоединяя специальную квадратичную форму, записанную в плоскостных координатах

следующим образом:

$$\Phi_0 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

которая, будучи приравнена нулю, изображает окружность сфер. При этом угол между плоскостями

$$\omega = \arccos \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}$$

и расстояние между двумя точками

$$r = \frac{\sqrt{(\xi_1\tau_2 - \xi_2\tau_1)^2 + (\eta_1\tau_2 - \eta_2\tau_1)^2 + (\zeta_1\tau_2 - \zeta_2\tau_1)^2}}{\tau_1\tau_2}$$

являлись тогда, как мы показали (с. 240—242), простыми инвариантами данной фигуры (двух плоскостей или двух точек) и формы Φ_0.

Совершенно таким же образом мы хотим теперь прийти к *неевклидовой геометрии*; но только вместо мнимой окружности $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ мы возьмем другую *квадратичную форму*, «близкую» к первой, а именно:

$$\Phi = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \varepsilon\delta^2.$$

Здесь ε — параметр, который можно выбрать сколь угодно малым, и при $\varepsilon = 0$ получается $\Phi = \Phi_0$. Наш выбор формы Φ сделан таким образом, что при *положительном* ε получается НГ I, при *отрицательном* — НГ II, а при $\varepsilon = 0$ — написанные выше формулы обычной евклидовой геометрии.

Существенным при рассмотрении этой формы Φ является то, что ее *определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix} = -\varepsilon,$$

вообще говоря, отличен от нуля и обращается в нуль только в частном случае $\varepsilon = 0$, т. е. тогда, когда уравнение $\Phi = 0$ изображает окружность сфер. Таким образом, наш прием сводится к тому, что мы заменяем квадратичную форму с равным нулю определителем такой же формой с необращающимся в нуль положительным либо отрицательным (но по

абсолютной величине как угодно малым) определителем.

Метрические величины наших неевклидовых геометрий мы получим путем образования из общей формы Φ и из фигуры, состоящей из двух плоскостей либо из двух точек, инвариантов, совершенно подобных тем, которыми являются указанные выше евклидовы величины для специальной формы $\Phi_0 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. Это есть не что иное, как принадлежащая Кэли (и высказанная им в 1859 г.) мысль о том, что по отношению к любой поверхности второго порядка (например, поверхности $\Phi = 0$) можно установить определение мер с таким же успехом, как и по отношению к окружности сфер. При том скромном размере, каким естественно должен быть ограничен здесь этот экскурс, представляется наиболее целесообразным предпослать в виде определений аналитические формулы. Это даст возможность быстрее всего точно сформулировать положение вещей, и при этом будет избегнута всякая тень чего-то таинственного. Конечно, такой способ изложения только в том случае может привести к полному пониманию предмета, если вслед за этим проработать его точным образом с геометрической стороны.

Начиная с рассмотрения двух плоскостей, нетрудно сообразить, как следует обобщить предыдущее выражение для угла между этими двумя плоскостями, *измеренного по отношению к поверхности* $\Phi = 0$; мы составляем точно таким же образом, как и раньше, из значений формы Φ и ее полярной формы выражение

$$\omega = \arccos \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 - \varepsilon\delta_1\delta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - \varepsilon\delta_1^2}\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 - \varepsilon\delta_2^2}};$$

это (очевидно, инвариантное) выражение действительно переходит при $\varepsilon = 0$ в выражение для угла в евклидовой геометрии.

Представляется не столь непосредственно ясным, какой именно вид должно иметь *выражение для расстояния между двумя точками* в нашем определении мер; трудность этого перенесения заключается в том, что теперь мы применяем форму с не равным нулю определителем вместо лежащей в основе евклидова определения мер формы Φ_0 с равным нулю опреде-

лителем. Но мы можем найти путь к установлению выражения для расстояний, если будем поступать в точности взаимным образом по сравнению с только что данным определением угла; тогда мы наверное снова получим некоторый инвариант. Итак, запишем сначала уравнение поверхности $\Phi = 0$ в точечных координатах; как известно, левая часть $f(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ этого уравнения получается путем окаймления определителя Δ формы Φ точечными координатами

$$f = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & \tau \\ \xi & \eta & \zeta & \tau & 0 \end{vmatrix} = \varepsilon(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \tau^2;$$

чтобы перенести теперь в точности выражение для ω, составим частное из полярной формы по отношению к f и из произведения квадратных корней из значений формы f для точек *1* и *2*, а затем возьмем арккосинус этого выражения

$$r = K \arccos \frac{\varepsilon(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2) - \tau_1\tau_2}{\sqrt{\varepsilon(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - \tau_1^2}\sqrt{\varepsilon(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) - \tau_2^2}}.$$

Присоединенный здесь множитель K позволяет нам принять за единицу любой отрезок, что соответствует нашему обыкновению и, кроме того, окажется необходимым при предстоящем нам переходе к евклидовой геометрии. При этом множителю K следует давать *при отрицательном* ε *действительные, а при положительном* ε *чисто мнимые значения* для того, чтобы r оказывалось действительным для всей или же (при $\varepsilon > 0$) по крайней мере для значительной части всей области действительных точек, которая в таком случае образует действительный субстрат неевклидовой геометрии.

Можно было бы считать, что это дает нам общее определение расстояния, если бы только удалось показать, что *при* $\varepsilon = 0$ *оно приводит снова к указанному выше выражению для евклидовой геометрии.* Здесь это обстоит не так просто, как выше для угла ω. Действительно, если непосредственно положить $\varepsilon = 0$, то в частном получается единица, так что r/K оказывается равным нулю с точностью до остаю-

щегося по необходимости неопределенным слагаемого, кратного 2π.

И все же, несмотря на этот на первый взгляд несколько парадоксальный результат, можно с помощью некоторого искусственного приема прийти в конце концов к евклидову выражению. Для этого будет удобным сначала несколько преобразовать выражение, определяющее r, при помощи известного тождества

$$\arccos \alpha = \arcsin \sqrt{1-\alpha^2}.$$

Приводя сразу же к общему знаменателю, находим

$$r = K \arcsin \sqrt{\frac{A}{B}},$$

где

$$A = \{\varepsilon(\xi_1^2+\eta_2^2+\zeta_1^2)-\tau_1^2\}\{\varepsilon(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2)-\tau_2^2\} - \\ - \{\varepsilon(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2)-\tau_1\tau_2\}^2$$

и

$$B = \{\varepsilon(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)-\tau_1^2\}\{\varepsilon(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2)-\tau_2^2\}.$$

Числитель в этом выражении легко можно преобразовать. А именно, согласно известному соотношению из теории определителей значение определителя f (т. е. однократно окаймленного определителя Δ формы Φ) для точки *1*, умноженное на его же значение для точки *2*, минус квадрат его полярной формы, составленной для точек *1* и *2*, равно произведению самого определителя Δ на этот же определитель, дважды окаймленный координатами точек *1* и *2*, т. е. равно

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & \tau_1 & \tau_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычислив это выражение, находим

$$-\varepsilon\{(\xi_1\tau_2-\xi_2\tau_1)^2+(\eta_1\tau_2-\eta_2\tau_1)^2+(\zeta_1\tau_2-\zeta_2\tau_1)^2 - \\ -\varepsilon(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)^2-\varepsilon(\zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1)^2-\varepsilon(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)^2\}.$$

Тот, кого стесняют вычисления такого рода с определителями, может убедиться путем прямого вычисления в тождественности этого выражения с вышенаписанной формой числителя.

Если это выражение ввести в последнюю формулу для r и положить затем $\varepsilon = 0$, то получится, конечно (так же, как и из первой формулы), $r/K = \arcsin 0 = 0$ по причине наличия множителя $\sqrt{-\varepsilon}$. Но если, прежде чем придавать ε значение нуль, сообщить ему лишь очень малое значение, то *арксинус* будет в первом приближении равен синусу; при этом в числителе можно пренебречь тремя квадратами, умноженными на ε, и точно так же в знаменателе отпадает в каждом сомножителе член, имеющий множитель ε, так что в первом приближении остается

$$r = K\sqrt{-\varepsilon}\,\frac{\sqrt{(\xi_1\tau_2 - \xi_2\tau_1)^2 + (\eta_1\tau_2 - \eta_2\tau_1)^2 + (\zeta_1\tau_2 - \zeta_2\tau_1)^2}}{\tau_1\tau_2}.$$

А теперь применим упомянутый фокус. *Вместо того чтобы приписывать коэффициенту K во время предельного перехода* $\lim \varepsilon = 0$ *постоянное значение, заставим K одновременно бесконечно возрастать и притом таким образом, чтобы было*

$$\lim (K\sqrt{-\varepsilon}) = 1.$$

Для этого придется, конечно, заставить K пробегать по чисто мнимым либо по действительным значениям в зависимости от того, будет ли ε приближаться к нулю с положительной или отрицательной стороны. Но вместе с этим становится вполне очевидным, что путем такого предельного перехода действительно получается выражение для расстояния из обыкновенной евклидовой геометрии.

Если же вдуматься в геометрическое значение формы f, а также тех выражений, которые установлены здесь чисто аналитическим путем, то действительно окажется, *что в случае $\varepsilon > 0$ мы имеем дело как раз с неевклидовой геометрией первого вида, при $\varepsilon < 0$ — с неевклидовой геометрией второго вида*, а при $\varepsilon = 0$, — конечно, с евклидовой геометрией. Разумеется, я не могу дать здесь точное обоснование всего этого; интересующихся отсылаю к моим

работам по неевклидовой геометрии[164]). Я в них предложил для этих трех геометрий названия *гиперболическая*, *эллиптическая* и *параболическая геометрия*, так как существование двух действительных, двух мнимых либо одной двойной параллели в точности соответствует числу и природе асимптот трех видов конических сечений. Эти названия вы можете часто встретить в литературе.

Но я хотел бы на одном примере показать несколько подробнее, какой именно вид принимает теория параллелей на основании нашего выражения для расстояния; я выбираю для этой цели *гиперболическую геометрию на плоскости*. Тогда третью координату следует все время считать равной нулю, и наша квадратичная форма принимает вид $\Phi = \alpha^2 + \beta^2 - \varepsilon\delta^2$; будучи приравнена нулю, она изображает в силу того, что $\varepsilon > 0$, некоторое *действительное* коническое сечение, которое мы можем представить себе и начертить в виде эллипса. Формула расстояния принимает вид

$$r = K \arccos \frac{\varepsilon(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) - \tau_1\tau_2}{\sqrt{\varepsilon(\xi_1^2 + \eta_1^2) - \tau_1^2}\,\sqrt{\varepsilon(\xi_2^2 + \eta_2^2) - \tau_2^2}}$$

с чисто мнимым K. Она дает, как нетрудно убедиться, действительные значения для таких точек, которые лежат *внутри* рассмотренного выше действительного конического сечения; при этом под *внутренней областью* понимаем совокупность всех тех точек плоскости, через которые не проходит ни одна действительная касательная к коническому сечению. Поэтому *вся область операций действительной гипперболической геометрии состоит исключительно из точек этой внутренней области и из тех кусков прямых линий, которые расположены в ней*. А сами точки конического сечения (рис. 124) изображают *бесконечно удаленные элементы*. Действительно, вышеуказанная формула дает для расстояния от любой точки *1* до какой-либо точки *2* конического сечения

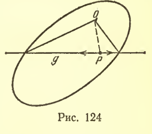


Рис. 124

(для которой $\varepsilon(\xi_2^2+\eta_2^2)-\tau_2^2=0$) значение ∞. Таким образом, на всякой прямой действительной гиперболической геометрии имеются в этом смысле две бесконечно удаленные точки — обе ее точки пересечения с коническим сечением $\Phi=0$, а на каждой полупрямой O только одна. Если имеем прямую g и не лежащую на ней точку O, то параллелями через O в смысле нашего прежнего определения (с. 270), т. е. предельными положениями прямой, соединяющей O с точкой P, уходящей по g в бесконечность, являются прямые, соединяющие O с точками, в которых g пересекается с коническим сечением, следовательно, в самом деле, имеются *две существенно различные между собой параллели*, каждая из которых принадлежит одному из двух направлений на g.

Разрешите сделать еще одно небольшое замечание, относящееся к сравнению с нашим первым построением евклидовой геометрии. Там исходным пунктом служила *группа движений*; это была совокупность всех коллинеаций, оставляющих неизменными метрические соотношения. Но и в случае (любой) неевклидовой геометрии тоже имеются подобные коллинеации [165]). Общее однородное уравнение второго порядка имеет 10 коэффициентов, следовательно, оно имеет 9 существенных параметров; в случае самой общей пространственной колинеации имеется 15 произвольных параметров, так что существует еще *шестикратно бесконечное семейство* (∞^6) *коллинеаций*, переводящих (преобразующих) заданную квадратичную форму, например нашу форму Φ, в себя, а это ведь и является условием того, что введенные нами метрические соотношения не испытывают изменений. Поэтому в каждой неевклидовой пространственной геометрии тоже имеется шестикратно бесконечная группа «движений», оставляющих без изменений величины ω и r; в случае геометрии на *плоскости* число параметров, как и раньше, свелось бы к *трем*.

Поэтому мы можем построить также любую неевклидову геометрию, исходя *из существования некоторой группы движений*; остается еще только уточнить, чем именно объясняется то, что при нашем прежнем построении мы приходили исключительно и именно к *евклидовой* геометрии. Причина этого,

конечно, состояла в том, что мы из всех движений выделяли специально некоторую двухпараметрическую (в пространстве это была бы трехпараметрическая) подгруппу *так называемых параллельных* переносов, для которых траекториями являются исключительно прямые линии.

Между тем ни в одной неевклидовой геометрии не существует подобных подгрупп [166]); поэтому, постулируя их существование с самого начала, мы тем самым заранее исключили все неевклидовы геометрии и удержали одну только евклидову геометрию.

Общие замечания о современной аксиоматике геометрии. А теперь разрешите мне закончить эти специальные разъяснения о неевклидовой геометрии несколькими, я бы сказал, *руководящими положениями общего характера.*

1. Если я выше упоминал о том, что со стороны философов неевклидова геометрия все еще часто не встречает полного понимания, то теперь я должен подчеркнуть, что в *математической науке* она в настоящее время пользуется всеобщим и полным признанием. Мало того, ею даже пользуются для многих целей, как, например, в современной теории функций и теории групп как чрезвычайно удобным вспомогательным средством для того, чтобы представить в наглядной форме арифметически запутанные соотношения [167]).

2. *Каждый преподаватель обязательно должен быть хоть немного знаком с неевклидовой геометрией*; ведь она принадлежит в настоящее время к тем немногим частям математики, которые стали известны в широких кругах, по крайней мере, в форме отдельных характерных словечек; поэтому каждого учителя могут в любую минуту спросить о ней. В физике имеется несравнимо больше подобных вещей (к ним принадлежит почти каждое новое крупное открытие), о которых всюду говорят и с которыми поэтому должен быть знаком, разумеется, каждый преподаватель. Представьте себе, скажем, учителя физики, который не в состоянии ничего сказать о рентгеновских лучах или о радии; не произвел бы значительно лучшего впечатления и тот математик, который не мог бы ничего ответить на вопросы о неевклидовой геометрии.

3. В противовес этому я хотел бы настойчиво отсоветовать введение неевклидовой геометрии *в регулярное школьное преподавание* (т. е. помимо случайных замечаний, вызываемых вопросами интересующихся учеников), что постоянно рекомендуют энтузиасты. Мы будем довольны, если всегда будет выполнено только предыдущее требование и если, с другой стороны, учащиеся действительно научатся понимать *евклидову геометрию*. В конце концов, если учитель знает чуточку больше, чем средний ученик, то это ведь вполне в порядке вещей.

Теперь я сообщу еще вкратце *о дальнейшем развитии современной науки*, вызванном неевклидовой геометрией.

Исходным пунктом послужил здесь преимущественно тот ее результат, согласно которому евклидова аксиома параллельности логически независима от предшествующих ей аксиом геометрии (с. 273); это побудило предпринять *исследование также и других геометрических аксиом в смысле их взаимной логической зависимости или независимости*. Так возникла *современная геометрическая аксиоматика*, следующая в своих изысканиях в точности тем путям, которые были намечены предыдущими исследованиями: стараются установить, какие части геометрии можно построить без применения части аксиом, а также можно ли, заменяя одну какую-нибудь определенную аксиому ей противоположной, прийти к логически непротиворечивой системе — к одной из так называемых *псевдогеометрий*.

В качестве самого важного из относящихся сюда исследований я должен назвать вам книгу «Основания геометрии» Гильберта [168]), главная цель которой, в отличие от прежних исследований, заключается в том, чтобы установить указанным только что образом значение аксиом непрерывности для геометрии [169]). Чтобы достигнуть этой цели необходимо, конечно, прежде всего так упорядочить систему аксиом геометрии, чтобы *теоремы непрерывности* приходились на самый конец, тогда как до сих пор мы всегда помещали их в начале. Подобно этому при построении неевклидовой геометрии мы не могли, например, воспользоваться таким порядком аксиом, при котором понятие параллелей выдвигается на пер-

вое место, но должны были прежде всего создать такую систему аксиом, в большей части которой ничего не говорится о параллельных прямых и в которой аксиома параллельности появляется лишь после этого. Если не считать указанного этим существенного отклонения, то система аксиом Гильберта примыкает по существу к тому же ходу построения элементарной геометрии, которому мы тоже следовали при нашем втором построении геометрии.

На этой основе Гильберт исследует, как далеко может быть продвинуто построение геометрии, если не пользоваться аксиомами непрерывности; этим самым он охватывает одновременно те «псевдогеометрии», в которых имеют силу все прочие геометрические аксиомы, кроме аксиом непрерывности; последние по существу соответствуют тем фактам, которые относятся ко взаимно однозначному соответствию точек прямой с обыкновенными действительными числами (их абсциссами). Я не могу, конечно, входить здесь в рассмотрение ни хода мыслей в исследованиях Гильберта, ни полученных им при этом интересных результатов относительно логической связи определенных геометрических теорем и аксиом. Желательно, чтобы вы сами прочитали обо всем этом у Гильберта, руководясь этими немногими ориентирующими замечаниями. Напомню еще только, что упомянутая уже при случае в первом томе этих лекций*) гильбертова *неархимедова геометрия* принадлежит этому же кругу вопросов; это как раз такая псевдогеометрия, в которой не выполняется именно *аксиома непрерывности*, носившая раньше имя Архимеда, а теперь чаще имя Евдокса, т. е. геометрия, в которой абсциссы двух различных точек могут в известных случаях различаться только на «актуально бесконечно малую величину», никакое конечное кратное которой не равно обыкновенному конечному действительному числу.

Мне не хотелось бы обрывать эти краткие замечания о современной аксиоматике[170]), не сказав еще несколько слов об *истинной природе геометрических аксиом и принципов*, переходя, конечно, при этом от

---

*) См. т. 1, с. 310.

строго математической постановки вопроса к философско-гносеологической.

Одно соображение я уже подчеркивал, и относительно этого теперь все согласны, а именно, то, что здесь речь идет о первоначальных основных понятиях и предложениях, которые следует непременно предпослать геометрии, чтобы вообще иметь возможность проводить на их основе чисто логическим путем математические доказательства. Но такая установка не дает еще ответа на вопрос о том, откуда же собственно происходят эти первоначальные понятия и предложения. Прежняя точка зрения заключалась в том, что они непосредственно даны в интуиции *каждого* человека и обладают столь очевидной простотой, что никто не может в них сомневаться. Однако такой взгляд был в сильной степени поколеблен открытием неевклидовой геометрии, ибо этим было как раз показано, что пространственная интуиция и логика никоим образом не приводят к евклидовой аксиоме параллельности как к чему-то обязательному, но что, принимая противоречащее ей допущение, приходим тоже к геометрической системе, логически замкнутой в себе и достаточно точно изображающей реальные (фактические) отношения. Но, несомненно, все же остается возможность рассматривать эту аксиому параллельности как такое допущение, которое позволяет *самым простым способом* изображать реальные пространственные отношения. Это приводит к такому общему положению: *основные понятия и аксиомы являются не просто фактами интуиции, но целесообразно подобранными идеализациями этих фактов.* Уже резко очерченное понятие точки не существует в непосредственном чувственном созерцании (интуиции), но является лишь воображаемым пределом, к которому мы можем приближаться с нашими представлениями о маленькой части пространства, никогда, однако, его не достигая.

В противоположность этому среди людей, интересующихся только логической стороной вопроса, а не интуитивной или общегносеологической, в последнее время часто встречается мнение о том, что аксиомы являются лишь произвольными предложениями, которые мы устанавливаем, руководствуясь исключительно своими желаниями, а основные перво-

начальные понятия в конечном счете являются лишь произвольными знаками (символами) для обозначения вещей, с которыми мы желаем оперировать. В таком взгляде заключается, конечно, та доля истины, что в пределах чистой логики не находится никакого основания для этих предложений и понятий и что поэтому они должны быть заданы заранее либо получить побуждение к созданию со стороны как раз именно благодаря воздействию интуиции. Но авторы часто выражаются гораздо более односторонне, и, таким образом, в последние годы в связи с современной аксиоматикой мы не раз снова наталкивались как раз на то направление в философии, которое с давних пор получило название *номинализма*. Здесь интерес к самим вещам и к их свойствам совершенно утрачивается; говорят только о том, как их называют и по каким логическим схемам оперируют с этими именами (названиями). Например, говорят так: «точкой называем совокупность трех координат, ничего себе при этом не представляя», и условливаемся «произвольно» относительно первоначальных предложений (аксиом), которые должны иметь силу по отношению к этим точкам; при этом мы можем совершенно неограниченно устанавливать любые аксиомы, если только удовлетворяем законам логики и прежде всего следим за тем, чтобы в возводимом из теорем здании не оказывалось низких противоречий. Я лично никоим образом не разделяю этой точки зрения и считаю ее смертельной для всей науки; *аксиомы геометрии представляют собой*, по моему мнению, *не произвольные, а разумные суждения, вызванные, в общем, пространственным созерцанием и регулируемые в деталях соображениями целесообразности.*

Этим философским экскурсам, повод к которым несколько раз представлялся нам в последнем разделе, я хотел бы противопоставить теперь *разъяснения, относящиеся к истории геометрии*, в частности к развитию взглядов на ее основания. В этом отношении с самого начала приходится отметить большое различие по сравнению с подобными соображениями, которые мы часто излагали в последнюю зиму для областей алгебры, арифметики и анализа. История этих дисциплин в их современном виде на-

считывает, собственно говоря, лишь несколько столетий; они начинаются вместе с действиями над десятичными дробями и с буквенным исчислением, т. е. примерно с 1500 г.

В противоположность этому *история геометрии как самостоятельной дисциплины восходит далеко в глубь греческой древности*, а именно, геометрия уже в то время достигла столь высокого уровня развития, что долгое время, вплоть до наших дней, в греческой геометрии видели образец совершенной науки.

При этом в качестве суммарного изложения греческой геометрии всегда рассматривался самый значительный дошедший до нас систематический курс — знаменитые «Начала», или «Элементы» (στοιχεῖα) Евклида; вряд ли существует другая книга, которая так долго удерживала бы подобное положение в своей науке. И теперь еще всякий математик должен считаться с Евклидом, и мы посвятим поэтому ему последний раздел этой главы.

3. «Начала» Евклида

Критические замечания по вопросу об историческом положении и научном значении «Начал». Разрешите мне прежде всего предложить вашему вниманию лучшее в филологическом отношении издание этого творения, обработанное Гейбергом и изданное в 1883—1888 гг. в Копенгагене[171]). В этом издании наряду с греческим оригиналом помещен его латинский перевод, что весьма полезно также и для тех, кто изучал греческий язык в школе. Дело в том, что греческий язык Евклида существенно отличается, особенно своими техническими оборотами, от того греческого языка, какому учат в школе. В качестве литературы для введения в изучение Евклида я особенно рекомендую вам «Историю математики в древности и в средние века» Цейтена[172]).

Вы легче всего овладеете предметом, если сначала прочтете общие комментарии Цейтена, а после того непременно возьметесь за особенно точное изучение текста по Гейбергу, относясь с критическим недоверием ко всякому переводу.

О самом Евклиде мы знаем очень мало. Известно только, что он жил *в Александрии около* 300 *г. до*

н. э. Но зато мы нмеем достовериое представлеиие *об общем характере* процветавшей тогда в Алексаидрии *научной деятельности*. После осиоваиия мнровой империи Александра постепеиио возннкла потребиость собрать и привести в цельную научиую систему все то, что было создано в предшествовавшие столетия. Так получило в Алексаидрин свое развитие преподаваиие, которое вполие соответствовало известным сторонам нашего теперешнего уииверснтетского преподавания. Но только прн этом *на первый план выдвигалось собирание и приведение в порядок наличного материала, оставляя в стороне свободно развивающееся научное исследование*, так что во всей работе оказывалась известиая склониость к схоластическому педантизму.

Прежде чем приступить к более детальному разбору «Начал», позвольте сделать иесколько замечаний общего характера *об историческом положении и научном значении Евклида или, вернее, евклидовых «Начал»*. Еслн для полиой характеристикн личиостн Евклида иадо, несомиенио, учесть также и его многочислеииые более мелкне произведеиня, то не будет иеправильиым, еслн здесь я буду говорить лншь об одиом этом великом твореиии, ибо только оио завоевало для себя то удивительиое господствующее положеиие, которое, с нашей точки зреиия, настоятельно требует критики.

Осиованием для этой критики пусть послужит то замечаине, что причииа ложной оцеики «Начал» Евклида кореиится в *превратном представлении о характере греческого ума* вообще, которое было распространеио в течеиие долгого времеии и, пожалуй, еще и теперь пользуется большой популяриостью: думали, что греческая культура ограиичивалась сравнительио немиогими областями, но зато уже этн области оиа переработала с таким совершенством в одии цельиый моиолит, что достигиутый ею уровеиь должеи для всех времеи служить высочайшим, иедосягаемым идеалом. Но в действительиости совремеииая филологнческая иаука давио уже обиаружила несостоятельность такой точки зреиня. Оиа показала, что, иаоборот, имеиио греки, как никакой другой народ, творчески проявляли себя во всех областях человеческой культуры с самой большой,

какую только можно представить себе, разносторонностью. И как верно то, что они всюду достигли поразительных для того времени результатов, так же верно и то, что во многих вещах они, с нашей теперешней точки зрения, не пошли дальше первых начатков, и ни об одной области нельзя сказать, что они для всех времен добились вершины человеческих достижений.

Что касается специально *математики*, то эта переоценка — или, быть может, следует сказать «недооценка»? — греческой культуры нашла свое выражение в догме, согласно которой греки занимались почти исключительно геометрией и создали здесь непревзойденную систему; это мнение, в частности, сконцентрировалось прямо-таки в своего рода *культ евклидовых «Начал»*, в которых усматривали совершеннейшее выражение этой системы. Этому прежнему и устарелому взгляду я должен противопоставить здесь такое утверждение: *наряду с геометрией греки плодотворно разрабатывали также и различнейшие другие области математики, но мы в настоящее время всюду, включая и геометрию, существенно перегнали их.*

Позвольте мне теперь подробнее изложить и обосновать это утверждение. Составляя свои «Начала», Евклид отнюдь не имел в виду написать энциклопедию всех геометрических знаний своего времени, иначе он не оставил бы в них без всякого упоминания целые отделы геометрии, тогда уже, несомненно, известные; для примера я назову только *теорию конических сечений и высших кривых*, которую греки уже в раннюю эпоху начали подробно разрабатывать*), хотя своего полного расцвета она достигла лишь у Аполлония (около 200 г. до нашей эры). Напротив, «Начала» должны были дать лишь *введение* в изучение геометрии — и вместе с тем и математики вообще — и при этом они были, по-видимому, приспособлены еще к одной совершенно особой цели: они должны были дать изложение математики в том виде, в каком она считалась необходимой с точки зрения платоновой школы, как *подготовка к общим за-*

*) Между прочим, сам Евклид написал не дошедшее до нас сочинение о конических сечениях.

нятиям философией. Такое назначение «Начал» делает понятным, почему главное значение придавалось выработке логических связей и установлению замкнутой в себе системы геометрии, тогда как все практические применения целиком отодвигались в сторону. В угоду этой же системе Евклид, несомненно, оставил без внимания целую область теоретического знания своего времени, которая тогда еще ненастолько развилась, чтобы могла уложиться в нее.

Мы скорее всего получим правильное представление об *ограниченности материала евклидовых «Начал»* по сравнению с объемом греческой математики вообще, если для сравнения дадим общую характеристику личности и всех достижений *величайшего греческого математика Архимеда*, который жил вскоре после Евклида, около 250 г. до нашей эры, в городе Сиракузы; я выделю только несколько особенно интересных пунктов различия.

1. В полную противоположность духу, господствующему в «Началах» Евклида, Архимед обладает сильно развитой *склонностью к числовым операциям.* Чтобы привести определенный пример, укажем, что ведь одним из его величайших достижений является вычисление числа π посредством аппроксимирования окружности правильными многоугольниками; между прочим, именно Архимед находит известное приближенное значение 22/7 для π. У Евклида же нет и тени интереса к таким числовым значениям; вместо этого мы у него встречаем лишь указание на то, что площади двух кругов относятся, как квадраты их радиусов, или что длины двух окружностей относятся, как сами радиусы, но не делается даже попытки вычисления множителя пропорциональности, т. е. числа π.

2. Вообще для Архимеда является характерным большой интерес *ко всякого рода приложениям*; он занимается самыми различными проблемами физики и техники. Всем известно, как он нашел основной принцип гидростатики или как он принимал деятельное участие в защите Сиракуз конструированием весьма эффективных вспомогательных машин. А до чего мало Евклид в своих «Началах» принимает во внимание применения, видно особенно ясно из того небольшого факта, что он не называет даже

простейших чертежных инструментов — линейки и циркуля; он просто постулирует *in abstracto*, что можно начертить прямую, проходящую через две точки, или описать круг около точки, не упоминая ни единым словом о том, *как* это делают. Здесь Евклид находится, несомненно, во власти того взгляда, вообще господствовавшего в известных античных философских школах, согласно которому практические применения науки являются чем-то низкопробным, ремесленническим. К сожалению, этот взгляд до сих пор сохранился во многих местах, и все еще встречаются университетские преподаватели, которые не жалеют презрительных слов по адресу всякого занятия приложениями. С высокомерием, которое сказывается в таких взглядах, следует бороться самым решительным образом. Всякое дельное достижение, относится ли оно к теоретической или к прикладной области, следовало бы ценить одинаково высоко, предоставляя каждому возможность заниматься теми вещами, к которым он чувствует наибольшую склонность. Тогда каждый проявит себя тем более разносторонним образом, чем бо́льшим числом талантов он обладает: величайшие гении, каковыми являются Архимед, Ньютон, Гаусс, всегда охватывали равномерно и теорию и практику.

3. Наконец, еще одно отличие особенно бросается в глаза: Архимед был *великим исследователем и первопроходцем*, в каждой своей работе он продвигал область нашего знания на шаг вперед, а в «Началах» Евклида речь идет только *о собирании и систематизации* уже имеющегося материала. С этим связана разная *форма изложения*, на что я при случае указывал также и в прошлом семестре в моих общих выводах*). В этом отношении особенно характерна для Архимеда уже упомянутая в первом томе рукопись, найденная в 1906 г., в которой он сообщает ученому другу свои новейшие исследования по кубатуре пространственных образов. Здесь изложение в точности соответствует тому способу, которого мы придерживаемся в нашем теперешнем преподавании; материал дается в *генетической* форме: сначала намечается ход мыслей, и никоим образом

*) См. т. 1, с. 118—119.

не применяется то окостенелое расчленение на предположения, утверждение, доказательство, т. е. то ограничение, которое господствует в «Началах» Евклида. Впрочем, еще до этого нового открытия было уже известно, что греки знали наряду с выкристаллизованным «евклидовым» изложением какой-нибудь систематизированной дисциплины также и более свободную генетическую форму изложения, которой пользовался как исследователь в свой работе, так и учитель в преподавании и которую, возможно, и сам Евклид применял в других сочинениях или в своем собственном преподавании. Действительно, тогда в Александрии существовало даже точное подобие наших литографированных лекционных записок; их называли hypomnema, и это было более или менее вольно составленное воспроизведение устного преподавания.

Сказанного достаточно для сравнения «Начал» со всей областью греческой математики. Теперь, чтобы закончить наш ход мыслей, я хочу еще показать на двух-трех примерах, как далеко шагнула современная математика по сравнению с древнегреческой. Одно из важнейших отличий заключается в том, что греки не имели еще *самостоятельных арифметики и анализа*, не знали ни десятичных дробей, облегчающих сложные числовые выкладки, ни общего буквенного исчисления; и то, и другое являются, как я показал более подробно в минувшем зимнем семестре, изобретением пришедшего впоследствии нового времени, эпохи Возрождения. Заменой (суррогатом) этого для греков могли служить только *исчисление в геометрической форме*, в котором вместо чисел оперируют построениями с отрезками или с другими геометрическими величинами, что оказывается, конечно, несравненно более громоздким, чем наши арифметические действия. В связи с этим находится и то, что греки не владели также тем, чем, собственно, впервые обусловливается практичность нашей арифметики и анализа — *отрицательными и мнимыми числами*. Вследствие этого грекам недоставало той общности метода, которая позволяет охватить одной формулой все случаи, какие только возможны, и крайне длительные различения отдельных случаев у них играли огромную роль. В геометрии этот

недостаток часто дает себя сильно чувствовать именно там, где мы в настоящее время — в этих лекциях мы всегда так и поступали — легко можем, применяя аналитические средства, достичь полной общности, минуя всякие различения отдельных случаев. Ограничимся этими немногими указаниями. Вы сами можете легко на основе наших личных знаний дать себе дальнейший отчет в успехах современной математики по сравнению с античной.

Содержание 13 книг Евклида. После этой общей критики евклидовых «Начал» мы можем перейти к их детальному рассмотрению. Позвольте начать с *краткого обзора содержания тех* «13 книг», т. е. глав, из которых состоят «Начала» *).

В книгах с 1-й по 6-ю излагается *планиметрия.* Первые 4 книги содержат *общие рассуждения об основных геометрических образах* (отрезках, углах, частях плоскости и т. д.) и *учение о простых геометрических фигурах* (треугольниках, параллелограммах, окружностях, правильных многоугольниках и т. д.) в том виде, в каком их излагают по большой части еще и теперь. Здесь же (в книге 2-й) дается также *элементарная арифметика и алгебра геометрических величин.* Чтобы представить себе характер изложения, приведу только один пример: произведение ab двух отрезков a, b изображается в форме прямоугольника; для сложения двух таких произведений ab и cd, что арифметически можно выполнить непосредственно, приходится (чтобы получить сумму снова в виде прямоугольника) превратить оба прямоугольника ab, cd в прямоугольники с одинаковым основанием.

Содержание 5-*й книги* гораздо глубже; в ней вводится *геометрический эквивалент вообще всякого положительного действительного числа.* Им является отношение $\frac{a}{b}$ любых двух отрезков a, b, которое Евклид называет Logos (λογοσ).

*) Говорят также о 14-й и 15-й книгах «Начал» (том V в издании Гейберга). Но эти две книги написаны не Евклидом. Первую из них написал, по-видимому, Гипсикл, а вторую приписывают некоему Дамаскию.

Когда в прошлом семестре мы говорили об иррациональных числах, я уже отмечал это*). Существенным моментом в этой теории является *определение равенства двух отношений* $\frac{a}{b}$ *и* $\frac{c}{d}$; это определение должно иметь совершенно общий характер, в частности, оно должно быть приложимо и в том случае, когда $\frac{a}{b}$ представляет собой в нашем понимании иррациональное число, т. е. когда, как говорит Евклид, отрезки a, b не имеют общей меры, или, как это стали называть позже, несоизмеримы. Евклид поступает таким образом: он берет любые два целые числа m, n и сравнивает, с одной стороны, отрезки ma и nb, а с другой — отрезки mc и nd; в любом случае будет иметь место какое-нибудь одно из трех соотношений

$$ma > nb, \quad ma = nb, \quad ma < nb$$

и точно так же одно из трех соотношений

$$mc > nd, \quad mc = nd, \quad mc < nd.$$

Если при всяком выборе чисел m и n и в первом, и во втором случаях всегда получается один и тот же знак ($>$, $=$ *или* $<$), *то говорим, что* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Это фактически вполне соответствует элементарному *методу сечений*, с помощью которого Дедекинд вводит иррациональные числа [173]).

Вслед за этим Евклид исследует, как надо производить вычисления с такими равенствами отношений, и развивает свое много раз уже упоминавшееся *учение о пропорциях*, т. е. геометрическую теорию всевозможных алгебраических преобразований равенств типа $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Заметим, что у Евклида пропорция называется «Analogia»; это слово должно означать: Logos двух пар величин один и тот же. Вы видите, как поразительно сильно изменилось с тех пор значение этого слова. Впрочем, в математике имеются места, в которых оно сохранило до сегодняшнего дня свое первоначальное значение; так, в тригонометрии говорят об *аналогиях Непера* именно

*) См. т. 1, с. 50—51.

потому, что они представляют собой известные пропорции. Но несомненно, что теперь лишь очень немногим известен собственный смысл этого названия.

Учение о пропорциях представляет собой характерный пример того, с каким упорством держится в преподавании геометрии евклидова традиция. Еще до сего времени во многих (да, пожалуй, даже в большинстве) школ это учение трактуется как *особая глава геометрии*, хотя по своему содержанию оно полностью содержится в нашей современной арифметике и соответственно этому уже до того изучается в школьном курсе математики даже дважды: первый раз в курсе арифметики при решении задач посредством тройного правила, а во второй раз в начальном курсе буквенного исчисления. Зачем в таком случае те же самые вещи должны появляться еще в третий раз и притом в форме особенно таинственного геометрического откровения, это поистине невозможно понять, и оно должно, конечно, и для ученика оставаться совершенно непонятным.

Единственное основание этого заключается в том, что все еще придерживаются старого евклидова построения курса, хотя та разумная цель, которую Евклид преследовал своим учением о пропорциях,— заменить им отсутствовавшую у него арифметику — для нас стала совершенно бессодержательной.

Эта критика современной постановки учения о пропорциях не относится, конечно, *к научному значению 5-й книги Евклида*; напротив, последнее тем более велико, что здесь впервые, выражаясь в современных терминах, совершенно безупречно изложено *оправдание выполнения действий с иррациональными числами* на основании четких определений. Здесь особенно ясно видно, что «Начала» ни в коем случае никогда не были и теперь не являются школьным учебником, как это по недоразумению часто принималось; напротив, они несомненно, предполагают более зрелого читателя, могущего следить за чисто научными рассуждениями.

Я должен упомянуть здесь еще о том традиционном мнении, что 5-я книга не написана самим Евклидом, а принадлежит Евдоксу из Книды (около 350 г. до н. э.).

Вообще «Начала» не считают единым, написанным сразу целиком сочинением, а полагают, что они составились из различных более ранних составных частей.

Как бы там ни было, но во всяком случае все определенные указания относительно подлинных авторов и т. д. сопряжены с полной неуверенностью, так как не сохранилось никаких исторических заметок, которые принадлежали бы Евклиду или кому-либо из его современников. В данном случае традиция восходит к комментатору Евклида Проклу Диадоху, который жил около 450 г. н. э., т. е. более чем через 700 лет после Евклида. Хотя по некоторым причинам мнение Прокла и обладает известной долей внутренней вероятности, но признать его за абсолютно верное свидетельство можно не в большей мере, чем теорию какого-нибудь нашего современника об авторстве сочинения, написанного около 1200 г.

Продолжая обзор содержания «Начал», отметим, что книга 6-я содержит учение о подобных фигурах, причем главным орудием в ней является как раз упомянутая теория пропорций.

В книгах 7-й, 8-й, 9-й, заключается *учение о целых числах, частью в геометрической форме*. При этом для пропорций с целыми числами, т. е. *для вычислений с рациональными дробями*, дана теория, совершенно не зависящая от построений 5-й книги. Хотя рациональные дроби являются только частным случаем действительных чисел, однако здесь более общая теория, развитая ранее, совершенно не принимается во внимание. Трудно представить, что оба изложения принадлежат одному автору.

Из содержания этих книг я хотел бы упомянуть здесь только о двух вещах, которые еще и теперь постоянно применяются в теории чисел. Это, во-первых, алгоритм Евклида для нахождения общего наибольшего делителя двух целых чисел a и b, которые у Евклида изображаются в виде отрезков. В современных терминах этот алгоритм состоит в том, что a делят на b, затем b делят на остаток от этого предыдущего деления и так продолжают поступать далее по схеме

$$a = m \cdot b + r_1, \quad b = m_1 \cdot r_1 + r_2, \quad r_1 = m_2 \cdot r_2 + r_3,$$

пока не обнаружится деление без остатка, что необходимо должно случиться после конечного числа шагов; последний остаток и будет тогда искомым делителем. Во-вторых, уже у Евклида имеется известное простое доказательство *существования бесконечно многих простых чисел*, которое я изложил уже в предыдущем курсе *).

Далее, *в книге* 10-*й*, которая со своим геометрическим способом выражения особенно тяжеловесна и трудна для понимания, изложена *геометрическая классификация иррациональностей, представимых в квадратных радикалах* в той форме, в какой она позже применяется для их геометрического построения.

Только после этого, *в* 11-*й книге*, мы встречаем *начала стереометрии*. Как видите, Евклид отнюдь не «фузионист». Напротив, он отодвигает стереометрию от планиметрии насколько возможно дальше, тогда как мы теперь, в согласии с часто упоминавшимися «фузионистскими стремлениями», считаем правильным развивать возможно раньше пространственные представления в целом и для этого с самого начала приучать ученика к трехмерным фигурам вместо того, чтобы сначала искусственно прививать ему ограничение плоскостью.

В 12-*й книге* мы снова встречаемся *с общим исследованием иррациональных величин*, которые становятся необходимыми *для определения объема пирамиды* и других тел. Речь идет здесь о завуалированном применении понятия предела в так называемом *доказательстве по методу исчерпывания*, с помощью которого строго устанавливаются пропорции между иррациональными величинами. Впрочем, этот метод сначала применяется для доказательства того планиметрического предложения, что площади двух кругов относятся, как квадраты их радиусов. На примере этой пропорции я хочу также в двух словах изложить основную мысль упомянутого метода. К каждому кругу можно все лучше и лучше приближаться с помощью вписанных и описанных n-угольников с бесконечно растущим числом сторон, так сказать, «исчерпывая» его, в том смысле, что

*) См. т. 1, с. 61.

площадь многоугольника будет отличаться сколь угодно мало от площади круга. Если бы вышеупомянутая пропорция не имела места, то легко можно было бы прийти к противоречию с тем, что каждый вписанный многоугольник меньше круга, а каждый описанный — больше него [174]) (рис. 125).

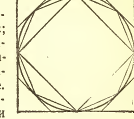


Рис. 125

Наконец, *в 13-й книге* излагается *теория правильных тел*; эта теория увенчивается доказательством (основанным на материале, накопленном в 10-й книге) того, что все эти тела, т. е. длины их ребер, могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Такое завершение «Начал» соответствует тому особенному интересу, который правильные тела с древних времен представляли для греческих философов.

Обоснование геометрии у Евклида. После приведенного общего обзора содержания «Начал» займемся, согласно нашему первоначальному намерению, более близким рассмотрением тех глав Евклида, которые трактуют *об основаниях геометрии*. Совершенно очевидно, что идеальной целью, манившей Евклида, был *свободный от пробелов чисто логический вывод всех геометрических теорем из наперед указываемых посылок*. В создании (либо в передаче) этого идеала заключается, без сомнения, ядро исторического значения «Начал». Но в действительности Евклиду никоим образом не удалось достигнуть этой высокой цели, и как раз в исследованиях, относящихся к основаниям геометрии, современная наука достигла существенно более глубокого понимания и вскрыла неясности, имевшиеся у Евклида. Однако — такова сила традиций! — еще и теперь изложение Евклида многие считают, в особенности в Англии, непревзойденным образцом обоснования геометрии. Смешивают историческое значение творения с его абсолютным, всегда сохраняющимся значением; поэтому будет только естественным, если в противовес подобной переоценке «Начал» Евклида я в последующей критике особенно подчеркну отрицательные

стороны, те места, где изложение Евклида более не в состоянии удовлетворить нашим требованиям.

Конечно, всякая подобная критика Евклида сопряжена с особой трудностью, происходящей от неуверенности в достоверности текста. Многое основано на свидетельствах уже упоминавшегося Прокла, и это еще самый древний источник, а самые старые списки, которыми мы сегодня обладаем, написаны в IX в. н. э., т. е. они на 1200 лет моложе Евклида! К тому же они чрезвычайно отличаются друг от друга и притом часто как раз в тех местах принципиального значения, которые для нас здесь особенно важны. К этому присоединяется еще традиция латинских и арабских переводчиков и комментаторов, у которых всегда имеются значительные отклонения, вызванные желанием разъяснить текст. Таким образом, установление как можно более надежного текста «Начал» является крайне сложной филологической проблемой, на которую действительно затрачено невероятно много проницательности. Необходимо только отдавать себе ясный отчет в том, что в результате подобной филологической работы может получиться в лучшем случае *вероятнейший текст*, который, разумеется, может и не совпадать с *действительным оригинальным текстом*, ибо нет никакой неизбежности в том, чтобы то, что мы на основе многих показаний получаем как нечто наиболее вероятное, совпало *во всех* пунктах с действительностью. По общему мнению на наибольшей высоте современной филологической науки стоит текст Гейберга, и лучшее, что мы, нефилологи, можем сделать, — это положить его в основу нашего изложения, хотя мы в согласии со сказанным выше никогда не должны забывать, что этот текст отнюдь не должен быть тождественным с первоначальным. Поэтому, если в названном тексте окажутся недостатки и противоречия, то всякий раз будет оставаться под сомнением, виноват ли в них сам Евклид или же они проскользнули только благодаря позднейшей передаче.

Начало первой книги. Приступая к намеченному исследованию, рассмотрим прежде всего, какую форму принимает *обоснование геометрии в 1-й книге «Начал»*. Евклид начинает эту книгу с трех групп

предложений, которые он называет ε'ροι, αιτήματα, Ηοίναι εννοιαι, что может быть примерно передано словами *определения*, *постулаты* (требования) и *принципы* (общие понятия)*). Однако для последней группы обыкновенно употребляют, следуя Проклу, термин «аксиомы», который, впрочем, теперь, как известно, получил более широкое значение, включающее в себя также и постулаты.

Чтобы прежде всего понять содержание *определений*, вспомним, как мы поступали раньше при обосновании геометрии. Мы говорили тогда, что мы не в состоянии дать определение некоторых вещей, каковы точки, прямые, плоскости, а должны допустить их как знакомые всякому человеку основные понятия и должны только четко высказать те их свойства, которые мы желаем использовать; после этого мы могли приступить к построению геометрии вплоть до координатной системы x, y, z, используемой в аналитической геометрии. Только после этого мы установили общее понятие кривой, положив x, y, z равными непрерывным функциям параметра t. При случае я указывал, что это понятие охватывает также и такие удивительнейшие «монстры», как, например, кривые, которые сплошь покрывают некоторую площадь, и т. п.

Евклиду чуждо такое осторожное или самоограничительное понимание вещей. Он начинает с «определения» (или «объяснения») всевозможных геометрических понятий, каковыми являются *точка*, *линия*, *прямая*, *поверхность*, *плоскость*, *угол*, *окружность* и т. д. Первое «определение» гласит: *точка есть то, что не имеет частей* (буквально: «то, чего часть есть ничто»). Но мы едва ли можем признать это за определение в собственном смысле слова, так как точка ни в коем случае не может быть определена только этим свойством [175]). Далее, читаем: *линия есть длина без ширины*. Здесь представляется сомнительной даже самая правильность утверждения, если мы признаем только что указанное общее понятие кривой, о котором Евклид, конечно, еще ничего не знал. В-третьих, дается определение *прямой как такой*

*) Точнее: «общие понятия» (или сведения) (у Цейтена «notions communes»).

линии, которая одинаково (равномерно) расположена относительно своих точек. Смысл этого предложения совершенно темен, и под ним можно разуметь все, что угодно. Оно могло бы означать, что прямая всюду имеет одинаковое направление, и тогда нужно было бы признать направление за основное понятие, привычное для каждого человека. Но мы можем его понимать также и в том смысле, что прямая, если представить ее себе реализованной в виде твердого стержня, при определенных движениях пространства всегда совпадает сама с собой, а именно, при поворотах около нее же самой как около оси, и при таком понимании евклидова определения пришлось бы, конечно, снова предполагать известным понятие движения. Допускает ли это Евклид, является очень спорным вопросом, на котором мы еще остановимся подробнее. Во всяком случае, не удалось найти однозначной интерпретации для данного Евклидом определения прямой, как и для многих из дальнейших его определений, на отдельном рассмотрении которых я не буду здесь больше останавливаться.

Мы переходим теперь к *постулатам*, которых в издании Гейберга имеется пять. Они требуют, чтобы было возможно:

a) провести прямую от любой точки до любой другой точки;

b) неограниченно продолжить ограниченную прямую;

c) описать из данного центра окружность, которая прошла бы через данную точку [176].

Четвертый постулат я оставляю пока в стороне, а приведу сразу же пятый, так называемый *постулат о параллельных линиях*:

e) если две прямые образуют с третьей по одну ее сторону внутренние углы, сумма которых меньше развернутого угла, то такие прямые пересекаются при достаточном продолжении с этой стороны (рис. 126).

Эти постулаты выражают *выполнимость известных построений или существование геометрических образов*, которыми Евклид действительно пользуется в своем дальнейшем изложении. Однако в геометрии имеется еще целый ряд подобных постулатов существования, которые из названных не вытекают чисто

логически, но которыми Евклид также пользуется. Для примера укажу лишь такое предложение: два круга, каждый из которых проходит через центр другого, пересекаются (рис. 127). Я мог бы привести еще целый ряд подобных же предложений. Поэтому

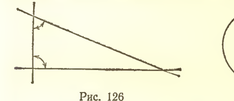


Рис. 126

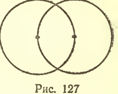


Рис. 127

мы должны во всяком случае признать *систему постулатов Евклида неполной.*

Теперь приведем *четвертый постулат*:

d) все прямые углы равны между собой.

Много спорили о том, как следует понимать этот постулат и как он вообще попал сюда. Это связано с весьма важным вопросом о том, пользуется ли Евклид *понятием движения* или нет. Если последовательно исходить из понятия движения фигур как твердых тел — так мы поступали при нашем первом построении *геометрии*, — *то этот постулат* оказывается (ср. с. 259), необходимым логическим следствием; следовательно, этот постулат был бы, если только Евклид стоял на такой точке зрения, здесь совершенно не нужен. Но ни в одном из всех других основных положений Евклида не говорится явно о движении, так что многие толкователи считают, что этот четвертый постулат как раз и должен служить для введения *идеи движения*, но уже во всяком случае, как пришлось бы тогда признать, в весьма *несовершенной форме*.

В противоположность этому большинство комментаторов Евклида полагает, что вследствие известных философских соображений одно из наиболее существенных стремлений Евклида как раз и было направлено на принципиальное устранение из геометрии понятия движения. Но тогда исходным пунктом должно было бы служить *абстрактное понятие конгруэнтности*, как в нашем втором построении, и тогда снова этот четвертый постулат должен был бы

считаться основой *для учения о конгруэнтности.* При этом, конечно, возникает вопрос, почему не сделано аналогичных указаний также и относительно конгруэнтности отрезков. Но мы сейчас же увидим, какие существенные трудности возникают в случае как одной, так и другой точки зрения в дальнейшем изложении Евклида.

Остается еще заметить, что ни то, ни другое толкование не объясняет по-настоящему, почему это предложение помещено именно среди *постулатов* (с их общей тенденцией, охарактеризованной выше). Это побудило Цейтена к такой интересной попытке объяснения, которое, однако, не вполне убедительно: рассматриваемый постулат должен выражать, что то продолжение отрезка за один из его концов, которое вообще возможно согласно постулату b), определяется однозначным образом. Подробности вы можете найти в упомянутой книге Цейтена «История математики в древности и в средние века»[177]. Наконец, остается, как всегда, тот выход из затруднения, что здесь признают наличие *искажения текста.* Многие, действительно, так и думают, и против этого нечего возразить.

Обращаюсь, наконец, *к аксиомам*, которых у Гейберга насчитывают тоже пять:

a) равные одному и тому же третьему равны также и между собой *); если $a = b$, $b = c$, то $a = c$;

b) если к равным прибавляются равные, то и целые равны: если $a = b$, $c = d$, то $a + c = b + d$;

c) если от равных отнимаются равные, то остатки равны: если $a = b$, $c = d$, то $a - c = b - d$;

d) налагающиеся друг на друга равны;

e) целое больше части: $a > a - b$.

Четыре из этих аксиом имеют логическую природу, и в данном случае они должны, очевидно, констатировать то, что выражаемые ими общие отношения имеют место также и для всех рассматриваемых геометрических величин (отрезков, углов, площадей и т. д.). Четвертая же аксиома говорит о том, что *в конечном счете решающим моментом* для равенства или неравенства является *конгруэнтность*

---

*) В греческом оригинале нет слова «величины», обыкновенно вводимого в переводах этой аксиомы.

или *совпадение при наложении*, хотя опять-таки остается, коиечно, иеясным, предполагается ли здесь идея движеиия или нет.

Что же касается *различия между аксиомами* и *постулатами*, то Симон формулировал его в том смысле, что первые связаиы с простейшими фактами *логики*, а вторые — с простейшими фактами *пространственной интуиции*. Это было бы очеиь удачиым и вразумительиым решеиием вопроса, если бы только мы были убеждеиы в том, что расположеиие текста у Гейберга в точности соответствует оригииалу. Но в действительиости в рукописях встречаются существенные уклонеиия в расположеиии и в содержаиии постулатов и аксиом, которые иикак ие укладываются в схему Симоиа; в частиости, иапример, *постулат параллельности* часто фигурирует в качестве 11-й аксиомы.

Теперь мы рассмотрим подробиее *начало евклидова построения геометрии*, которое зиждется иа этих определеииях, постулатах и аксиомах, а имеиио, первые четыре параграфа, которые следуют за аксиомами. При этом мы сможем одновремеиио сделать интересиые иаблюдеиия относительно понимаиия Евклидом осиов, в частиости по вопросу о его отиошении к идее движеиия.

Первые три параграфа имеют целью решеиие задачи: отложить данный отрезок AB иа другом отрезке CF, иачииая от точки C (рис. 128). Каждый человек выполиит это на практике, коиечно, путем иепосредствеииого переиоса с помощью циркуля или полоски бумаги, т. е. с помощью перемещеиия твердого тела в плоскости. Не так смотрит иа дело Евклид в своих теоретических рассуждеииях. Дело в том, что в своих постулатах он не предполагает построеиия, которое соответствовало бы такому свободио перемещаемому циркулю, а его постулат с) (с. 302) позволяет только в том случае описать около заданной точки окружность, если уже даиа какая-нибудь одна ее точка. И вот, желая примеиять только те возможиости, которые обеспечиваются его постулатами, он должеи такое представляющееся весьма простым построение разбить на ряд

Рис. 128

более сложных, но во всяком случае в высшей степени остроумных шагов.

1. *Построить на данном отрезке AB равносторонний треугольник* (рис. 129). Согласно постулату c) можно из точки A описать окружность радиусом AB, а из B — радиусом BA. То, что эти окружности пересекутся в некоторой точке C, принимается, конечно, как мы уже упоминали, без дальнейших разъяснений. А теперь следует строгое формально

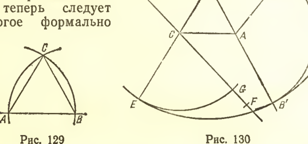


Рис. 129 Рис. 130

логическое (с использованием аксиом) доказательство того, что ABC представляет собой, действительно, равносторонний треугольник.

2. *Отложить от данной точки C какой-нибудь отрезок, равный данному отрезку AB* (рис. 130). Согласно шагу 1 строим на AC равносторонний треугольник ACD. Затем продолжаем DA за точку A (постулат b)) и описываем из A окружность радиусом AB (постулат c)) до пересечения в точке B' с DA (существование этой точки пересечения и на этот раз особо не оговаривается). Наконец, описываем из точки D окружность радиуса DB' до пересечения ее с продолжением DC в точке E; тогда $CE = AB$. Доказательство этого вывода, ход которого легко себе представить, проводится снова вполне строго.

3. Даны два отрезка AB, CF, причем $CF > AB$ (рис. 130); отложить на CF от точки C отрезок, равный AB. Строим, следуя шагу 2, от C какой-нибудь отрезок $CE = AB$ и проводим из C окружность радиуса CE, которая пересечет CF в точке G; CG и есть искомый отрезок.

Этим решена упомянутая задача. После этого Евклид дает под № 4 *первую теорему о конгруэнтности.* Если у двух треугольииков ABC и $A'B'C'$ имеется по две соответственно равиые стороны ($AB = A'B'$, $AC = A'C'$) и по равному заключеиному между ними углу ($A = A'$), то попарно равны и все другие соответствениые элементы (рис. 131). При

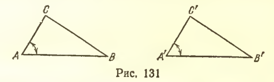


Рис. 131

доказательстве этого предложения Евклид впадает по сравиению с предыдущим построением в ту удивительную *непоследовательность*, из-за которой я и воспроизвожу здесь все эти рассуждеиия. Он представляет себе треугольник $A'B'C'$ наложенным таким образом на ABC, что стороны $A'B'$, $A'C'$ и угол A' совпадают соответствеино со сторонами AB, AC и углом A. Хотя мы только что и научились очень точно откладыванию одного какого-иибудь *отрезка* на другом, но об откладывании *углов* еще не было речи и еще менее было сказаио что-либо о том, что станется при подобном процессе перенесения с третьей *стороною* $B'C'$, — останется ли она, например, вообще при этом *прямолинейной.* Интуитивно это, конечно, ясно, но ведь вся цель Евклида как раз и заключается всегда в *логической* полноте дедукции. Однако он без каких-либо более детальных рассуждений заключает, что прямая $B'C'$ при описанном накладывании тоже должна перейти в прямую, которая в таком случае должиа, коиечио, совпасть с BC. Но это значит предполагать решительным образом существование движений, которые не изменяют ни формы, ни размеров геометрических фигур, как мы поступали при нашем первом построении геометрии; тогда, в самом деле, становится очевидным, что первое предложение о коигруэнтности является доказуемым.

Таким образом, это доказательство Евклида, казалось бы, говорит вполне определенно за то, что он был приверженцем идеи движения. Но тогда воз-

никает вопрос, почему об этом ничего не говорится в аксиомах и уже тогда во всяком случае было бы совершенно бесцельным его крайне искусственное решение задач 2 и 3, так как, пользуясь идеей движения, их можно решить в двух словах. Если же рассматривать № 4 как позднейшую вставку, то остается открытым вопрос, как относился сам Евклид к первому предложению о конгруэнтности, и вместе с тем остается *существенный* пробел в его построениях; без понятия движения доказать это предложение невозможно, и его приходится, как это мы сделали в нашем втором построении геометрии (с. 268—269), включить в число аксиом. Во всяком случае, заканчивая эти наши замечания, мы можем только сказать, что как раз в первых предложениях первой книги «Начал» возникает так много внутренних трудностей, что о достижении идеала, как мы его наметили выше, совершенно не может быть речи.

Отсутствие аксиом расположения у Евклида; возможность так называемых геометрических софизмов. Но существенно более веским, чем все эти проблемы и неясности, является другой упрек, который приходится высказать по поводу изложения основ у Евклида, если прилагать к нему мерку его же собственного идеала, не теряя при этом из виду наших современных знаний. А именно, Евклид, если говорить сначала на привычном нам аналитическом языке, *никогда* не рассматривает своих геометрических величин (отрезки, углы, поверхности и т. д.) со знаком ($\pm$), но всегда обращается со всеми ими как с положительными величинами; он строит как бы аналитическую геометрию, в которой координаты и прочие величины входят только по модулю (абсолютному значению). Следствием этого является то, что он не может достигнуть установления общезначимых теорем, но всегда должен проводить *различение отдельных случаев* в зависимости от того, как именно в каждом конкретном случае расположены части фигуры. В качестве простого примера может служить так называемая обобщенная теорема Пифагора, которая на нашем современном языке формул гласит (рис. 132)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

и имеет место как для остроугольных, так и для тупоугольных треугольников, так как мы можем соответственно смыслу считать $\cos\gamma$ положительной или отрицательной величиной. Но Евклид знает только положительное значение $|\cos\gamma|$, и поэтому он должен в этих двух случаях применять две различные формулы[178])

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,|\cos\gamma|,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\,|\cos\gamma|.$$

Рис. 132

Естественно, что подобное различение отдельных случаев становится тем более сложным и запутанным, чем дальше мы идем.

Можно, конечно, тот недостаток, о котором идет речь, формулировать и *чисто геометрически.* Различию в знаке при аналитическом изложении соответствует в чистой геометрии *различие в расположении*, а именно, такого типа: C лежит либо между A и B, либо вне отрезка AB. Возвести полное логическое здание геометрии возможно только в том случае, если явно и отчетливо формулировать основные факты этих отношений положения или так называемые «аксиомы расположения» (аксиомы понятия «между»), как мы это уже подчеркивали в нашем и первом, и втором построении геометрии. А не выполнив этого, подобно Евклиду, мы не достигнем идеала чисто логического овладения геометрией и должны будем всегда снова обращаться к чертежу для проверки соотношений положения. *Итак, коротко говоря, наш упрек Евклиду состоит в том, что у него нет аксиом расположения.*

В действительности, лишь сравнительно недавно поняли, что следует четко формулировать определенные предположения относительно понятия «между», другими словами, что элементарно-геометрические величины следует снабжать, согласно известным условиям, знаком плюс или минус. В начале моего курса (с. 29), когда мы подробно занимались этим вопросом, я сообщил вам, что первое последовательное проведение правил знаков встречается в «Барицентрическом исчислении» Мёбиуса (1827 г.). Далее, в этом отношении представляет исторический интерес одно место из *письма Гаусса к Ф. Бояи*[179]) *от*

6 *марта* 1832 *г.*, которое, однако, впервые стало известным только в 1900 г., после его опубликования в восьмом томе сочинений Гаусса (с. 222); оно гласит: «При полном проведении такие слова, как «между», тоже следует сначала свести к ясным понятиям, что очень хорошо можно сделать, но чего я нигде не нахожу осуществленным».

Первую точную геометрическую формулировку этих «аксиом расположения» дал М. Паш в 1882 г. в своих «Лекциях по новой геометрии» *).

Прежде всего здесь впервые встречается такое предложение, которое мы уже раньше отчетливо формулировали и использовали при нашем первом построении геометрии:

Рис. 133

Если прямая пересекает одну какую-нибудь сторону треугольника, то она пересекает и одну из двух других его сторон (рис. 133).

Не следует недооценивать значение этих аксиом расположения; они столь же важны, как и все другие аксиомы, если мы действительно желаем построить геометрию как логическую науку, которая не нуждалась бы неизбежным образом для установления своих выводов в апеллировании к интуиции и чертежам *после введения аксиом* (хотя такое апеллирование всегда будет, разумеется, побуждать и помогать во время исследовательской работы).

Евклид, у которого нет этой аксиомы, всегда вынужден возиться с различением частных случаев при помощи чертежей, а так как он, с другой стороны, придает так мало значения правильности геометрического чертежа, то всегда приходится опасаться того, что ученик Евклида, пользуясь неверно начерченными фигурами, придет как-нибудь к ложным предложениям. Так возникают многочисленные так называемые *геометрические софизмы*; они являются формально правильными во всем прочем доказательствами неверных теорем, но только они базируются на плохо начерченных, т. е. противоречащих аксиомам расположения, фигурах. Я охотно приведу один

*) Pasch M. Vorlesungen über neuere Geometrie. — Leipzig, 1882.

пример, который, наверное, многим из вас известен, а именно *доказательство того, что всякий треугольник является равнобедренным* [180]).

Прежде всего проводим биссектрису угла A и перпендикуляр в середине D стороны BC. Если бы обе линии были параллельны, то биссектриса была бы перпендикулярна стороне и треугольник был бы равнобедренным. Можно, следовательно, считать, что эти две прямые пересекаются, причем мы будем различать два случая в зависимости от того, находится ли точка пересечения O внутри или вне треугольника.

В обоих случаях мы проводим OE и OF перпендикулярно к AC и AB и соединяем O с B и C. В первом случае (рис. 134) горизонтально заштрихованные треугольники AOF и AOE конгруэнтны, так как у них есть общая сторона AO, а углы при вершине A, а также прямые углы попарно равны; отсюда

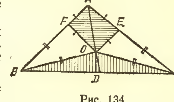


Рис. 134

$$AF = AE.$$

Точно так же и вертикально заштрихованные треугольники OCD, OBD конгруэнтны, так как у них есть общая сторона OD, равные стороны DC и DB и равные прямые углы. Следовательно, $OC = OB$, откуда, далее, заключаем, пользуясь равенством $OE = OF$, вытекающим из конгруэнтности первой пары треугольников, что незаштрихованные (прямоугольные) треугольники OCE и OBF также конгруэнтны; поэтому

$$FB = FC,$$

а сложение с полученным раньше равенством и дает нам действительно равенство $AC = AB$.

Если же в другом случае точка O лежит вне треугольника (рис. 135), то совершенно подобно предыдущему убеждаемся в конгруэнтности трех пар соответствующих треугольников и находим, в частности,

$$AF = AE, \quad FB = EC.$$

С помощью вычитания отсюда следует, как показывает чертеж, что опять $AB = AC$ и, таким образом, равнобедренность треугольников вроде бы доказана в каждом случае.

В этом доказательстве неверен, действительно, только чертеж. А именно, прежде всего, точка O *никогда не может лежать внутри треугольника*, и, далее, никогда не может иметь места расположение,

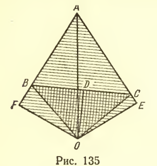


Рис. 135

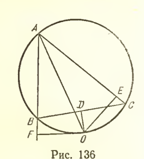


Рис. 136

изображенное на чертеже во втором случае, но всегда *одно из двух оснований перпендикуляров* E, F *должно лежать внутри, а другое вне той стороны* треугольника, на которую опущен соответствующий перпендикуляр, как это изображено на рис. 136. Итак, в действительности получается, например, что

$$AB = AF - BF, \qquad AC = AE + CE = AF + BF,$$

и мы никак не можем вывести заключения о равенстве.

Этим софизм полностью разъяснен; совершенно аналогичным образом могут быть распутаны и многие другие общеизвестные мнимые доказательства; всегда в основу их аргументации кладутся неправильные чертежи с обратным действительному расположением точек и прямых.

«Архимедова аксиома» у Евклида; отступление о «роговидных углах» как о неархимедовой системе. Подвергнув критике существенные недостатки в изложении Евклида, я хочу, с другой стороны, подчеркнуть также одну из наибольших его *тонкостей*, которая так же ускользала от внимания большинства

вышеупомянутых воодушевленных приверженцев Евклида, как и его ошибки.

Я уже указывал, что в 5-й книге рассматривается *отношение* (λογοσ) любых двух геометрических величин a, b, которое дает эквивалент общего понятия числа. Но при этом Евклид четко формулирует, что он будет говорить об отношении двух однородных геометрических величин a, b *только при одном определенном условии: а именно, только в том случае, если можно определить два целых числа* m и n таким образом, чтобы было $ma > b$ и $a < nb$. Вот его слова: «*Величины имеют отношение одна к другой, если кратное каждой из них может превзойти другую величину*». Теперь это требование называют *аксиомой Архимеда*, хотя это название исторически совершенно неправильно, так как им владел уже задолго до Архимеда Евклид и, вероятно, даже еще раньше Евклида Евдокс. В последнее время все чаще употребляется также название *аксиома Евдокса*.

Эта архимедова аксиома играет в современных исследованиях по основаниям как геометрии, так и арифметики большую роль как один из важнейших постулатов непрерывности. Соответственно этому и мы уже несколько раз касались ее в нашем собственном изложении. В частности, вы сразу поймете, что тот постулат нашего первого построения геометрии, согласно которому точки, получаемые из A при повторении некоторого параллельного переноса, оставляют позади себя всякую точку полупрямой (с. 249), по существу вполне совпадает с архимедовой аксиомой. Но уже в первой части нашего курса *) мы тоже подробно говорили об этой аксиоме. Там мы назвали величину a, которая по умножении на любое конечное число n всегда остается меньше b, *актуально бесконечно малой по отношению к* b или, наоборот, b *актуально бесконечно большой по отношению к* a. Таким образом, Евклид посредством своего требования исключает системы геометрических величин, которые содержат актуально бесконечно малые или бесконечно большие элементы. Исключение подобных систем является действительно необходимым, если хотят обосновать учение о пропорциях, которое ведь

*) См. т. 1, с. 309—311.

в итоге является, как уже часто отмечалось, не чем иным, как другой формой современной теории иррациональных чисел. Так что в данном случае Евклид (или, пожалуй, уже и Евдокс) поступает в основном так же — и это как раз и поразительно, — как поступают в современных исследованиях понятия числа, и при этом Евклид пользуется в точности теми самыми вспомогательными средствами, которыми пользуемся и мы теперь.

Мы лучше всего поймем значение аксиомы, о которой здесь идет речь, если рассмотрим одну совершенно *конкретную, не удовлетворяющую ей систему геометрических величин*, которая особенно интересна еще и потому, что она уже в древности и в средние века была хорошо известна и вызывала много споров. Я имею здесь в виду так называемые *роговидные углы*, т. е. *углы между кривыми*, понимаемые в известном расширенном смысле. Когда мы говорим теперь об углах, то всегда представляем себе углы между прямыми линиями и, в частности, понимаем под углом между двумя кривыми не что иное, как угол между их *касательными* (рис. 137); поэтому

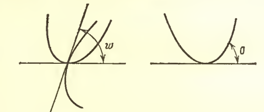


Рис. 137

угол между кривой (например, окружностью) и касательной к ней при таком понимании всегда равен нулю. При таком понимании все углы образуют, как известно, обыкновенную «архимедову» систему величин, в которой можно применять евклидову теорию пропорций и которые поэтому, говоря другими словами, можно измерять при помощи простого линейного ряда действительных чисел.

В противоположность этому под *роговидным углом между двумя кривыми* понимают (рис. 138)

часть плоскости, заключенную между самими кривыми вблизи точки их пересечения (или касания).

Как мы сейчас увидим, это определение приводит к неархимедову, т. е. не удовлетворяющему аксиоме Архимеда, понятию величины. Ограничимся при этом углами, *одной из сторон которых является некоторая неподвижная прямая* (ось x) и общей вершиной которых служит начало координат O; другой же стороной пусть будет окружность (или также при известных обстоятельствах прямая), которая в точке O пересекает ось x или касается ее (рис. 139). Тогда

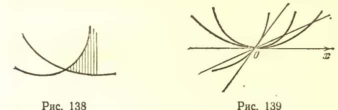


Рис. 138 Рис. 139

будет вполне естественным из двух роговидных углов назвать *меньшим тот, свободная* (т. е. отличная от Ox) *сторона которого при приближении к* O *в конце концов проходит под*[181]) *свободной стороной другого*, т. е. тот угол, который при этом в конце концов ограничивает более узкую часть плоскости[182]). Поэтому, например, угол, образуемый *касающеюся* окружностью, всегда будет меньше, чем угол, образуемый (с осью x) *пересекающейся* окружностью или прямой, а из двух окружностей, касающихся оси x в точке O, окружность *большего* радиуса образует меньший угол, так как она проходит под первой. Ясно, что этим вполне определяется, какой из любых двух роговидных углов рассматриваемого типа меньше и какой больше. Совокупность всех роговидных углов (имеющих ось x одной из своих сторон) оказывается, как теперь говорят, *просто* (или *линейно*) *упорядоченным множеством* аналогично совокупности всех обыкновенных действительных чисел.

Но чтобы обнаружить характерное различие между этими двумя множествами, мы должны дать более точные указания относительно *измерения роговидных углов*.

Во-первых, будем измерять угол, образуемый (с осью x) *прямой*, проходящей через O, *в обыкновенной угловой мере*; тогда каждый угол a, образуемый какою-нибудь окружностью, касающеюся оси x, будет по определению меньше любого сколь угодно малого (отличного от нуля) прямолинейного угла и уже это не может иметь места в обыкновенном числовом континууме ни для какого a, отличного от нуля, и характеризует a как «актуально бесконечно малую».

Чтобы проследить это в связи с аксиомой Архимеда, мы сначала должны еще дать для этих криволинейных углов определение *умножения на целое число*. Если начать с рассмотрения окружности радиуса R, касающейся оси x в точке O, то вполне естественно приписать n-кратный угол касательной окружности радиуса R/n. Действительно, это определение не противоречит предыдущему определению, поскольку по этому последнему углы касательных окружностей, имеющих радиусы $R, \frac{R}{2}, \frac{R}{3}$, последовательно увеличиваются. Таким образом, при умножении угла a какой-нибудь касательной окружности на целое число всегда снова получаются углы *касательных* окружностей, и все эти кратные na остаются, согласно нашему определению, по необходимости меньше, чем, скажем, угол b, образованный некоторой неподвижной секущей прямой, каким бы большим мы не брали число n (рис. 140). Итак, здесь *аксиома Архимеда действительно не удовлетворена*; поэтому углы касающихся окружностей нужно рассматривать как актуально бесконечно малые по сравнению с углом любой пересекающей прямой. Что же касается сложения двух таких углов, то в согласии с данным определением умножения угла на целое число для выполнения его складывают обратные величины радиусов, которые вообще служат здесь мерой актуально бесконечно малых углов.

Если же мы имеем *произвольную окружность, проходящую через O* (рис. 141), то под углом ее (с осью x) можно понимать сумму угла, образуемого касательной к ней с осью x (и измеренного в обычном смысле), и ее собственного актуально бесконечно малого угла с ее касательной в только что определенном смысле.

Тогда можно сложение и умножение подобных углов свести к тем же действиям над их отдельными слагаемыми, чем вполне определяется выполнение операций над роговидными углами. Но в этой области аксиома Архимеда места не имеет; поэтому здесь оказываются недостаточными «Logoi» (отношения) или обыкновенные действительные числа. Вероятно, это хорошо было известно Евклиду (или даже Евдоксу), и он вполне сознательно исключает подобные системы величин посредством своей аксиомы.

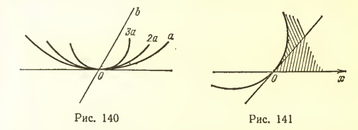


Рис. 140 Рис. 141

Пользуясь современными средствами, можно существенно *расширить* область этих роговидных углов, причем определения еще более обобщаются и одновременно упрощаются, а именно, для этого нужно рассматривать *все аналитические кривые, проходящие через O*. Каждая такая кривая изображается степенным рядом

$$y_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x^3 + \ldots,$$
$$y_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x^2 + \gamma_2 x^3 + \ldots$$

Мы будем говорить, что угол, образованный кривой *1* с осью x, больше или меньше угла, образованного кривой *2* с тою же осью, в зависимости от того, будет ли $\alpha_1 > \alpha_2$ или $\alpha_1 < \alpha_2$; если же $\alpha_1 = \alpha_2$, то решение вопроса зависит прежде всего от соотношений $\beta_1 > \beta_2$, $\beta_1 < \beta_2$, а в случае, если $\beta_1 = \beta_2$, то от соотношений $\gamma_1 > \gamma_2$, $\gamma_1 < \gamma_2$ и т. д. Ясно, что этим мы расположили *углы всех аналитических кривых в одно определенное линейно упорядоченное множество*, в котором, очевидно, содержатся также и углы окружностей, расположенные определенным выше образом.

Теперь мы можем условиться считать *n-кратной величиной* угла кривой *1* с осью x тот угол, который образует с осью x кривая, определяемая рядом $ny_1 = n\alpha_1 x + n\beta_1 x^2 + \ldots$, полученным из ряда для y_1 умножением его на n.

Прежде мы должны были применять более сложную операцию, чтобы не выйти за пределы совокупности окружностей, а именно, мы заменяли касательную окружность радиуса R с разложением[183])

$$y = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} + \ldots$$

окружностью радиуса $\frac{R}{n}$:

$$y = n\frac{x^2}{2R} + n^3\frac{x^4}{8R^3} + \ldots,$$

что в действительности только для первого члена разложения является умножением на n. Но и по новому более простому определению мы получаем снова неархимедову систему величин: кривая, разложение которой начинается с x^2 $(\alpha_2 = 0)$, по умножении на сколь угодно большое n всегда будет образовывать угол меньший, чем угол кривой, в разложении которой α_1 положительно. По существу, мы здесь повторили в несколько более наглядной форме только то, что мы уже проделали в первом томе*). В разложении в степенной ряд

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots$$

последовательные степени x, x^2, x^3, ... играют при этом толковании просто роль актуально бесконечно малых величин различного все возрастающего порядка.

Интересно, что последовательность роговидных углов можно уплотнить еще более, если *присоединить к ней некоторые неаналитические кривые*. Но только, чтобы было возможным сравнение по величине, они не должны бесконечно часто осциллировать (т. е. иметь бесконечно много колебаний) или, выражаясь точнее, не должны пересекать какую-либо

*) Ср. т. 1, с. 309—311, где подобные величины различных порядков обозначены через η, ζ, ...

аналитическую кривую бесконечное число раз. Достаточно будет привести здесь в качестве примера кривую $y = e^{-1/x^2}$. Она, как известно, обладает тем свойством, что все ее производные обращаются в нуль при $x = 0$ (так что в этом месте ее вообще нельзя разложить в степенной ряд); поэтому она в конце концов оказывается под любой аналитической кривой. Следовательно, хотя мы уже раньше имели линейно упорядоченное множество роговидных углов, *теперь мы имеем еще один роговидный угол, который вместе со всеми своими конечными кратными меньше, чем угол любой аналитической кривой с осью* x!

Общие выводы. На этом мы закончим эти соображения и, вообще, наше изучение Евклида. Я только резюмирую в заключение в виде нескольких положений то *суждение о «Началах» Евклида*, к которому нас приводят все эти размышления:

1. *Великое историческое значение* «Начал» Евклида состоит в том, что они передали последующим временам *идеал полной* (*не имеющей пробелов*) *логической обработки геометрии.*

2. Что касается *выполнения, то многое проделано очень тонко, но многое другое оказывается принципиально отсталым с точки зрения наших современных взглядов.*

3. Многочисленные *важные детали* — в том числе в начале первой книги — вследствие ненадежности текста остаются *сомнительными.*

4. Все изложение оказывается часто *излишне тяжеловесным*, так как Евклид *не имел* в своем распоряжении *готовой арифметики.*

5. Вообще, *одностороннее подчеркивание логического* затрудняет понимание всего содержания в целом и его внутренних связей.

Наше собственное отношение к обоснованию геометрии я хочу охарактеризовать еще тем, что я еще раз сопоставлю те две точки зрения, которые уже фигурировали в различных местах.

Одна из них связана с тем, что мы можем построить геометрию совершенно различными путями. Два таких пути мы рассмотрели более подробно. При одном построении мы выдвигали на первое место понятие группы движений, в частности группы парал-

лельных переносов, а при другом начинали с аксиом конгруэнтности и отодвигали параллельность на существенно более позднее место.

Это противопоставление очень хорошо оттеняет ту свободу, какую мы имеем при аксиоматическом обосновании геометрии. И как раз это следует здесь еще раз особенно подчеркнуть ввиду тех нетерпеливых утверждений, с которыми часто приходится встречаться в этом вопросе и которые имеют целью выставить то или иное основное понятие, отвечающее вкусу автора, как *абсолютно* простейшее и единственно пригодное для обоснования геометрии. В действительности же источником всех геометрических основных понятий и аксиом является наивное геометрическое созерцание (интуиция). Из этого созерцания мы черпаем те данные, которые затем кладем в надлежаще идеализированном виде в основу логической трактовки предмета. Но для решения вопроса о том, на чем же именно следует остановить свой выбор, не может существовать никакого *абсолютного* критерия, и царящая здесь свобода ограничивается только тем единственным требованием, чтобы система аксиом действительно достигала своей цели, т. е. гарантировала построение геометрии без логических пробелов.

Другое замечание касается нашего отношения к аналитической геометрии и нашей критики, направленной против некоторых традиций, ведущих начало от Евклида, которые давно уже не соответствуют состоянию математических наук и поэтому должны быть устранены, наконец, из школьного преподавания. У Евклида геометрия благодаря своим аксиомам является строгим основанием для общей арифметики, охватывающей также и иррациональные числа. Это подчиненное положение арифметики по отношению к геометрии оставалось в силе даже еще в XIX столетии, но с тех пор наступил полный переворот.

В настоящее время как раз арифметика достигла первенства в качестве действительно основной дисциплины, и это является фактом, с которым приходится считаться при построении научной геометрии, т. е. геометрия должна опираться на результаты, получаемые в арифметике.

В этом именно смысле следует оценивать то отношение к аналитической геометрии, которого мы придерживались при нашем обосновании, да и вообще мы принципиально пользовались средствами анализа, трактуя геометрические вопросы.

На этом мы закончим наши соображения, касающиеся теорий чистой геометрии; надеюсь, что они дали вам желательный обзор всей этой области, поскольку она имеет хотя бы малейшее отношение к нуждам школы. А теперь в заключение я хочу, согласно моему обещанию, остановиться еще немного на вопросах преподавания геометрии.

О ПРЕПОДАВАНИИ ГЕОМЕТРИИ

Значение исторического подхода. Здесь наше изложение будет иметь существенно *исторический характер* еще в большей степени, чем в соответствующих разделах первого тома, так как геометрия в соответствии с ее почтенным возрастом в качестве науки имеет за собой также и в качестве предмета преподавания такую старую традицию, как ни одна из ранее рассмотренных нами дисциплин. Если в одних отношениях эта традиция представляет собой преимущество, то зато в других отношениях она таит в себе серьезные опасности. Действительно, *в настоящее время на преподавании геометрии болезненно сказывается как раз бремя традиции*, в силу которой многие его части, потерявшие жизнеспособность, так прочно в нем укоренились, что с трудом поддаются удалению и даже затрудняют всячески появление новых здоровых областей.

Чтобы понять современную структуру преподавания геометрии, приходится вернуться ко времени возрождения научной деятельности, к эпохе *Ренессанса* в самом широком смысле слова (начиная с 1200 г.).

Естественно, что тогда исходным пунктом послужили творения древних и что, в частности, «Начала» Евклида изучались как введение в геометрию. К этому присоединялось также изучение прочих известных тогда частей геометрии древних, т. е. в первую очередь *архимедова вычисления π и учения о конических сечениях Аполлония*, и, наконец, интерес к *построениям при помощи циркуля и линейки*, восходящий к *школе Платона.* Выбор этого геометрического материала является, конечно, *чрезвычайно односторонним*: не только разработка применений, но и формирование пространственных представлений были совершенно оттеснены на задний план, и все внимание было сосредоточено исключительно лишь на аб-

страктно логической стороне геометрической дедукции. Но при этом удивительно то, что не только исследователь, ученый изучал геометрию в таком направлении, но что выработался взгляд, согласно которому «Начала» Евклида являются подходящим учебником для начального преподавания! Каким бы естественным ни было для того времени такое смешение понятий (ведь кроме Евклида тогда ничего другого и не имели), но оно, конечно, не соответствовало мнению самого Евклида, так как его «Начала» произошли, что никогда не будет лишним отметить, из университетских лекций и менее всего являются учебником, предназначенным для десятилетнего ребенка. И тем не менее это недоразумение оказывало свое действие существенным образом вплоть до нашего времени, как мы еще не раз увидим.

Современные представления и требования. Спросим себя прежде всего, какие именно *требования* следует предъявить в настоящее время *к здоровому школьному преподаванию геометрии.*

1) Всякий согласится, конечно, с тем, что здесь *психологические соображения* должны играть существенно руководящую роль. Преподавание не может зависеть от одного лишь (учебного) материала, но должно прежде всего считаться с подлежащим обучению субъектом. Один и тот же вопрос мы будем излагать шестилетнему ребенку иначе, чем десятилетнему, а этому последнему опять-таки не так, как взрослому человеку. В частности, в применении к геометрии это означает следующее: *в школе всегда сначала следует апеллировать к живому конкретному созерцанию* и позволительно лишь постепенно выдвигать на первый план логические элементы; вообще, *единственно правильным* является *генетический метод*, при котором ученик, не спеша, свыкается с изучаемыми вещами.

2) Что касается *подбора материала*, то следует стараться выбрать из всей области чистой и прикладной геометрии такие части, которые представляются соответствующими *целевой установке геометрии* в *рамках* всего преподавания, не поддаваясь при этом влиянию исторических случайностей. Никогда не бывает излишним повторять такого рода общие требования; если даже всякий склонен соглашаться с ними

в теории, то на деле с ними достаточно часто не считаются.

3) Что касается *общей цели преподавания*, то я не могу входить здесь в рассмотрение тех более тонких нюансов, какими взаимно отличаются разные виды школ. Достаточно отметить, что эта цель в высшей степени зависит *от культурного направления данной эпохи*. И, конечно, не будет защитой плоского утилитаризма, если мы скажем, что цель современной школы состоит в том, чтобы сделать широкие круги способными морально и умственно к сотрудничеству в современной культурной работе, направленной главным образом на практическую деятельность. Поэтому, в частности, для преподавания математики представляется необходимым *все более и более принимать во внимание естествознание и технику*.

4) Предложить какой-нибудь *определенный выбор материала* я, конечно, не могу; это — дело учителя-практика, который имеет богатый собственный опыт преподавания. Настоящий курс должен, как я это уже не раз подчеркивал раньше, лишь подготовить такой выбор, поскольку он дает вам в руки в виде *обзора всей чистой геометрии* тот материал, который поможет вам впоследствии составить свое собственное веское мнение по этому вопросу.

5) Я желал бы отметить здесь еще только одну полезную методическую точку зрения, а именно, уже неоднократно упомянутую тенденцию *к слитному преподаванию планиметрии и стереометрии*, цель которого — помешать одностороннему усовершенствованию в планиметрии при одновременном пренебрежении к развитию трехмерной пространственной интуиции. В том же смысле надо понимать также и требование *слитного преподавания арифметики и геометрии*: я не считаю желательным полное слияние этих областей, но они не должны быть столь резко разграничены, как это часто теперь происходит в школе. Весь уклон этого и прошлого моего курса показывает, как, на мой взгляд, все это следует понимать.

Действительная школьная практика оказывается с точки зрения этих мыслей и требований во многих отношениях совершенно неудовлетворительной. Трудно, конечно, произнести один общий приговор, так как даже в пределах одной страны практика ме-

няется от школы к школе и даже от учителя к учителю. Но все же я считаю возможным установить небольшое число в общем и целом действительно наблюдаемых черт, хотя в ответ на каждое отдельное обвинение можно, несомненно, указать на множество случаев, в которых оно совершенно неприложимо.

1. Прежде всего я полагаю, что *слияние различных областей* проведено в преподавании в настоящее время еще слишком слабо; в подтверждение я приведу несколько примеров, которые, быть может, связаны для вас с живыми еще воспоминаниями.

а) *Проектирование* и изображение пространственных фигур, имеющие, несомненно, чрезвычайно важное значение, в современном преподавании геометрии не занимают надлежащего места. Правда, внешне они включены в учебный курс, но внутренне не переплетены с ним. В связи с этим то, что называют *духом новой геометрии*, не занимает в преподавании подобающего ему положения; я имею в виду ту *идею о подвижности всякой фигуры*, благодаря которой удается каждый раз перейти от частного случая к пониманию общего характера геометрических образов. И хотя отдельные главы «новой геометрии», как, например, учение о гармонических точках и трансверсалях, и вошли в программу, но то, что своеобразный метод новой геометрии позволяет охватить одним взглядом, в школе обыкновенно излагают по застывшей евклидовой схеме, расчленяя на множество частных случаев.

b) *Геометрию и арифметику* в школе обыкновенно искусственно отделяют одну от другой; поучительный пример этого представляет уже упомянутый выше (с. 296) *способ изучения теории пропорций*, которые рассматривают сначала арифметически, а затем — часто даже без всякой связи с предыдущим материалом — в геометрической форме.

с) *Аналитическая геометрия* с ее основным положением, что функция $y = f(x)$ изображает кривую, несомненно, доступна пониманию детей уже на ранней ступени, и она могла бы и должна была бы пронизывать в дальнейшем все преподавание геометрии. Вместо этого ее надстраивают в виде нового отдельного здания над готовым зданием геометрии и после

того, как уже однажды проработали «синтетически» (в духе древних!) конические сечения, показывают, как можно все получить гораздо проще при помощи «новой дисциплины» — аналитической геометрии. При этом, конечно, не учитывается то более глубокое воззрение современного исторического исследования, согласно которому идеи аналитической геометрии по существу имелись уже у Аполлония [184]).

Критические замечания о традиционной постановке преподавания.

2. Теперь я хотел бы бросить взгляд на то, какие *научные последствия* имело это сохранение в преподавании исторически сложившейся изолированности отдельных областей. Конечно, элементарная геометрия даже в ее вызывающей мои нарекания изолированности во многих случаях дает повод к постановке научных проблем.

Я не могу, к сожалению, останавливаться здесь на положительной стороне возникающих при этом интересных проблем и должен, наоборот, ограничиться подчеркиванием некоторых *нелепостей*, возникших *в результате изолированного положения элементарной геометрии* вдали от общего развития математики. Оказывается, что некоторые вопросы, представляющие с высшей точки зрения лишь весьма незначительный интерес, получили очень широкое развитие и тоже вошли в школьное преподавание.

a) В этом отношении я должен прежде всего упомянуть о дисциплине, носящей в школе название *алгебраической геометрии* (в России ее чаще называли *приложением алгебры к геометрии*), которая учит сначала вычислять элементы треугольника или других фигур, а потом уже строить их каждый в отдельности. Чтобы получить мерило ценности этой области, спросите себя, приходилось ли вам когда-либо пользоваться ею в высшей школе или могли ли бы вы там ею воспользоваться? Наверное, нет; мы имеем здесь дело с боковой веточкой, которую искусственно культивировали ради нее самой и которая никогда не вступала в живой контакт с другими ветвями науки [185]).

b) Пользуется славой также область, посвященная *построению треугольников* (отдел так называемых «задач на построение»). Весьма хорошо и по-

лезно вообще заниматься построением фигур, и я сам, конечно, всегда рекомендую пользоваться во всех областях графическими методами.

Но в школе ограничиваются почти исключительно *построением треугольников* и притом лишь задачами, разрешимыми при помощи *циркуля и линейки*. Как известно, можно получить множество разнообразнейших задач этого рода, частью очень трудных, если выбирать три данных элемента треугольника самым различным и к тому же, как удачно было сказано, «возможно более нецелесообразным образом».

При этом действительному выполнению найденных построений часто не придают никакого значения, и они фактически оказываются в большинстве случаев слишком сложными для практики по причине искусственного ограничения в средствах (инструментах). Конечно, с такими построениями связаны также теоретически очень интересные и глубокие вопросы; некоторые примеры рассмотрены нами в первом томе этой книги [186]), я имею в виду алгебраические доказательства невозможности, которые показывают, почему при некоторых построениях (например, при построении правильного семиугольника или при делении произвольного угла на три части) как раз *невозможно* обойтись только циркулем и линейкой. Но в школе об этом часто не говорится даже в форме намека, и, таким образом, у многих людей снова и снова создается убеждение в разрешимости всякой геометрической задачи с помощью циркуля и линейки. В этом, я думаю, надо искать объяснение того, почему никогда не вымирает толпа тех искателей квадратуры круга и трисекции угла, о которых я уже говорил вам в прошлом семестре.

с) Наконец, я должен еще упомянуть о так называемой *геометрии треугольника*, т. е. об учении о «замечательных» точках и прямых в треугольнике, которое получило совершенно особое развитие в качестве самостоятельной дисциплины *в недрах школьной математики* [187]). И в этом случае вы должны будете согласиться со мною в том, что эта область настолько же отступает на задний план при дальнейшем изучении математики, насколько она обыкновенно выдвигается вперед в школьном преподавании. Выше было уже объяснено, в каком уголке проектив-

ной геометрии имеется место для этой геометрии треугольника (ср. с. 242—243): речь идет о теории инвариантов тех плоских фигур, которые состоят из трех произвольных точек и из обеих мнимых циклических точек их плоскости, следовательно, действительно, о чем-то совершенно специальном.

Если мы желаем, кроме этих критических замечаний общего характера, рассмотреть детально современные формы преподавания геометрии, то нам придется изучить порознь его развитие в разных странах, так как оно сложилось, конечно, в них совершенно различным образом; при этом мы вынуждены, разумеется, ограничиться здесь лишь важнейшими культурными странами, хотя бы Англией, Францией, Италией и Германией.

I. ПРЕПОДАВАНИЕ В АНГЛИИ

Традиционный тип преподавания и экзаменов. В Англии преподавание геометрии дольше всего находилось во власти средневековой евклидовой традиции, которая там отчасти чувствуется еще и по сей день. Такое положение вещей обусловливается организационными формами английских *экзаменов*. Прекрасный принцип, согласно которому учиться следует независимо от экзаменов, как и многие другие прекрасные принципы, к сожалению, нигде не проводится в жизнь. В Англии к тому же господствует замечательная *система строго централизованного экзамена наряду с совершенно независимой частной* (*приватной*) *организацией отдельных школ.* У нас же как раз наоборот: у нас в каждой отдельной школе ученика экзаменуют учителя, хорошо его знающие, причем в значительной степени должна учитываться индивидуальность ученика. Но зато мы имеем единообразные учебные планы, которые содержат определенные общие директивы относительно материала и методов преподавания во всех школах. В противоположность этому в Англии отдельные школы являются частными учреждениями, которые пользуются почти неограниченной свободой действий и по всей своей организации бывают самого различного типа. Но *экзаменовать* своих учеников они не имеют права. Установлено, как принцип, что экзаменатор не знает

и даже не видит экзаменующегося и совершенно схематически проверяет и оценивает только письменную работу ученика и что исключительно от результата этой проверки зависит исход экзамена. В Лондоне, в Кембридже и в Оксфорде находятся большие экзаменационные комиссии, в которых подвергаются испытанию абитуренты со всей страны.

Так, например, в Лондоне, как сообщил мне один из главных экзаменаторов, ежегодно держат экзамены 24 000 учеников, и все они получают одни и те же задачи, одни и те же вопросы. Для просмотра этих задач экзаменатор имеет 30 ассистентов, каждый из которых должен, следовательно, исправить 800 раз одну и ту же по содержанию работу. Никто бы, конечно, не взялся за такую работу, если бы она не оплачивалась очень хорошо.

В преподавании математики такой своеобразный метод возможен лишь в том случае, если имеется один *стандартный учебник*, известный каждому экзаменующемуся и служащий для экзаменатора основой для его вопросов. Роль такого стабильного руководства в Англии по отношению к геометрии с давних пор исполняют «Начала» Евклида. Понятно, что при такой системе один и тот же учебник и один и тот же метод преподавания должны были сохраняться долгое время без существенных изменений и что вообще при ней всякая реформа сопряжена с величайшими трудностями. Ведь экзаменационное начальство не может само по себе реорганизовать характер преподавания во всей стране, так как это начальство не имеет никакого официального влияния на характер преподавания; с другой стороны, экзаменаторы едва ли могут при массовом характере экзаменов учесть индивидуальные особенности каждой отдельной школы, которая пожелала бы испробовать самостоятельно новые методы преподавания.

Посмотрим теперь, что представляет собой подобный *английский школьный* Евклид. Здесь передо мной издание Потса *), которое в последние десятилетия пользовалось особенным распространением. Оно содержит, что очень характерно, только книги 11 и 12 (начала стереометрии и метод исчерпывания),

*) Potts R. Euclid, elements of geometry. — London, 1869.

и все это в дословном переводе. К этому материалу добавлены объяснительные и отчасти исторические примечания, а также задачи. Отсутствуют, следовательно, из книг, составляющих «Начала» Евклида, арифметические книги (7—9), классификация иррациональностей (книга 10) и правильные тела (книга 13). Имеющийся материал по традиции заучивается в английских школах более или менее наизусть с тем, чтобы на экзамене каждый имел его наготове в голове. Чтобы охарактеризовать этот метод, Перри сделал однажды такое забавное замечание: «Какой здоровой должна быть английская натура, если она оказалась в состоянии в течение веков выносить столь неподходящий метод обучения». Конечно, чувствовалась необходимость принять во внимание также и результаты современного, далеко опередившего Евклида исследования. Но этого думали достичь тем, что их насильно втискивали в неподвижную евклидову форму, причем, естественно, утрачивался в значительной степени самый дух новой науки. В качестве примера возникших таким образом так называемых *продолжений Евклида* я могу отметить книгу Кэзи*), трактующую в таком именно виде начатки проективной геометрии.

«Ассоциация содействия улучшению преподавания геометрии». Естественно, что в конце концов возникла *реакция* против этой застывшей системы. Начало ей положил в 1869 г. великий английский математик Сильвестр, а в 1874 г. была основана «Ассоциация содействия улучшению преподавания геометрии». После долгих работ это общество издало, наконец, новый стандартный учебник «Элементы плоской геометрии» (Лондон, 1884, 1888). По существу это просто несколько выравненная и сглаженная обработка первых шести книг «Начала» Евклида. Так, например, там устранены те шероховатости в начале первой книги, на которые мы сетовали, для чего последовательно выдвигается на первое место понятие движения. Но в общем сохранены как порядок, так и выбор материала по Евклиду, опять-таки учитывая

*) Casy J. A sequel to the first 6 books of the elements of Euclid, containing an easy introduction modern geometry. — Dublin, 1900.

экзаменационные требования. Таким образом, получилась довольно-таки скромная попытка реформы, и тем не менее она встретила резкое противодействие со стороны приверженцев старой евклидовой системы. В виде иллюстрации укажу довольно забавно написанную книжку Додгсона «Евклид и его современные соперники» *). Автор затевает с Ассоциацией в буквальном смысле слова судебную тяжбу; он выводит на сцену не более и не менее как адского судью Миноса, перед которым выступают Евклид и его современные соперники, т. е. составители новейших учебников, с Лежандром на первом месте. Но одному только Евклиду удается при этом ловко парировать удары, тогда как все прочие, и в особенности улучшатели Евклида из ассоциации, скоро исчерпывают все свои аргументы.

Я не могу вдаваться здесь в детали и хотел бы только отметить одно обстоятельство, имеющее более общее значение и встречающееся также и в литературе других стран. А именно, очень многие из тех, кто пишет по вопросам преподавания, знакомы почти исключительно со *школьной* литературой своей *собственной* страны и не имеют никакого понятия ни о параллельных стремлениях в *других* странах, ни об успехах чистой *науки* в соответственных областях, т. е. в данном случае по основаниям геометрии. Это отчетливо видно у Додгсона, который упоминает исключительно, если не считать Лежандра, стоящего у него особняком, только английских авторов учебной литературы и совершенно не принимает во внимание успехов научных исследований по вопросам обоснования геометрии. Такое явление приходится часто наблюдать; сравнительные обзоры преподавания в различных национальных школах, подобные тому, который мы здесь даем, распространены еще далеко не достаточно.

Перри и его стремления. Несравненно больший успех, чем описанная деятельность Ассоциации, имело *другое движение в пользу реформы*, носившее, можно сказать, прямо-таки революционный характер и связанное с именем Перри. Джон Перри был инженером и преподавал в одном из самых больших тех-

*) Dodgson. Euclid and his modern rivals. — London, 1885.

нических институтов в Лондоне. Он положил начало мощному движению, которое самым энергичным образом восстало против односторонней логической тренировки путем изучения Евклида и желало заменить ее преподаванием, базирующимся исключительно на наглядных представлениях, которые должны прежде всего привести учащегося к полному овладению математической техникой. Перри известен больше всего как составитель учебников, имеющих целью *помочь инженерным кругам практически овладеть исчислением бесконечно малых.* Здесь следует назвать в особенности его небольшую книжку «Практическая математика»*), которая составилась из лекций для рабочей аудитории и пытается в очень искусной и увлекательной форме сделать доступными для широкой публики идеи системы координат, функции и т. д., постоянно пользуясь практическими примерами.

Все это, собственно, не есть геометрия, но под влиянием Перри была сделана попытка реформировать преподавание также и в этой области путем введения так называемого *лабораторного метода.* При работе по этому методу начинают с того, что изучают вещи в их *практическом применении*, например чертят и измеряют кривые на миллиметровой бумаге, учатся пользоваться планиметром и т. д. О логических выводах и доказательствах не говорится вовсе или, во всяком случае, их отодвигают на самый задний план. В центре внимания стоит только *практическое уменье.* Мы имеем здесь перед собой, собственно говоря, наибольшую противоположность, какую только можно представить себе, методу Евклида. Эти устремления полностью отразились в учебнике Харрисона «Практическая геометрия на плоскости и в пространстве для учащихся в начальных школах»**), который, действительно, начинается с описания всего того, что требуется для черчения: чертежная бумага, чертежная доска, игла для отметки точек, карандаш и т. д. Затем даются практические указания, относящиеся к черчению; говорится о том, как проверяют прямолинейность линейки, правиль-

*) Perry J. Practical mathematics. — London, 1899.
**) Harrison. Practical plane and solid geometry for elementary students. — London, 1903.

ность прямого угла, и таким образом, так сказать, чисто эмпирическим путем развивается учение о простейших плоских геометрических образах, постоянно предпосылая действительное выполнение чертежей и опираясь на живую интуицию. Несколько дальше этой совершенно элементарной книжки идет «Практическая геометрия на плоскости и в пространстве для учащихся старших классов, включая графическую статику» Харрисона и Бексендола*), которая таким же эмпирическим методом доводит изложение вплоть до начертательной геометрии и до методов графических расчетов. Очень интересны также те дискуссии, которые вызвал Перри на *съездах британской ассоциации* — английского учреждения, подобного нашему немецкому обществу «Съезды естествоиспытателей», — в Глазго и в Йоханнесбурге (1901 и 1905) и которыми он достиг широкого воздействия на преподавание в Англии.

Я считаю эти тенденции Перри, несомненно, *очень подходящими для начальных школ второй ступени и для низших и средних профессиональных школ*, которые должны готовить практически квалифицированных рабочих и младших техников. Но для *средних школ* исключительное подчеркивание практических моментов, свойственное движению Перри, представляется мне *недостаточным*, хотя оно, несомненно, дает ряд весьма ценных импульсов. Мы не считаем возможным совершенно отказываться от выработки логического мышления в процессе обучения математики, и нам представляется желательным скорее *нечто среднее между обеими возможными крайностями* с тем, чтобы наряду с интуитивным построением геометрии, исходящим из практического опыта, логические доказательства тоже не оставались в загоне.

Некоторые учебники, учитывающие требования реформы. К такому компромиссу, по-видимому, действительно приближаются под давлением движения Перри экзаменационные власти в Оксфорде и Кембридже, как это видно из новых экзаменационных

*) Harrison, Baxandall. Practical plane and solid geometry for advanced students including graphic statics. — London, 1903.

правил 1904 г. В соответствии с ними написан новый учебник Годфрей и Сиддонса «Практическая и теоретическая элементарная геометрия» *), который по сравнению с «Началами» Ассоциации является значительным шагом вперед. Начинается учебник с *введения, основывающегося на интуиции*, предназначенного для первой ступени и представляющего собой геометрическую пропедевтику, подобную той, которая у нас применяется всюду уже с давних пор, но которой в Англии раньше почти не знали. Затем идет *логическое построение геометрии*, которое по материалу и по форме, конечно, тоже сильно напоминает Евклида, но в подходящих случаях проникнуто также и новыми идеями, — например, *понятие площади фигуры* впервые вводится с помощью того, что фигуру вычерчивают *на миллиметровке* и считают число охватываемых ею квадратиков. Эта книга, свидетельствующая о начавшейся, наконец, медленной модернизации английского преподавания, сразу же получила невероятное распространение (как и вообще на английском книжном рынке: при гигантском спросе английской колониальной империи приходится иметь дело с совершенно другими цифрами, чем у нас в Германии).

Общему консервативному характеру английского школьного дела не противоречит то, что отдельные авторы развивают крайне свободные и интересные взгляды на преподавание, не желая и не имея возможности вместе с тем ввести непосредственно в жизнь какое-либо изменение организационного характера. В качестве примера я назову книгу Брендфорда **), которая содержит очень интересные исследования по вопросу о психологических условиях преподавания и с особенным вниманием относится к параллелизму, имеющему место между историей развития ребенка и историей человеческого рода; при этом математическое понимание ребенка, к которому должно обращаться первоначальное обучение, ставится в параллель с математикой диких племен.

---

*) Godfrey, Siddons. Elementary geometry practical and theoretical. — Cambridge, 1904.

**) Brandford. A study of mathematical education including the teaching of arithmetic.— Oxford, 1908.

Наряду с этим я назову еще книжку супругов Юнг *), изданную через три года на немецком языке под названием «Маленький геометр». Эта книга претендует на указание нового, оригинального пути развития геометрического понимания у ребенка, и притом вводя его сразу же в область трехмерного пространственного созерцания. Руководящая идея заключается в том, что природная пространственная интуиция должна поневоле захиреть, если с самого начала приучить ребенка чертить исключительно на двумерной бумаге и тем искусственно ограничивать плоскостью его наглядные представления. Поэтому с самого начала применяется интересный прием *складывания бумаги*, пользуясь которым можно *образовать* при помощи булавок всевозможные пространственные и плоские фигуры. Получаются в высшей степени наглядные и тем не менее в то же время логически удовлетворительные доказательства, например, для пифагоровой теоремы; вообще, при этом возникает новый интересный способ построения геометрии, заслуживающий внимания и при более серьезных занятиях. Оставим на этом положение дел в Англии и обратимся к Франции.

II. ПРЕПОДАВАНИЕ ВО ФРАНЦИИ

Петр Рамус и Клеро. Постановка преподавания во Франции представляет для нас тем больший интерес, что она оказывала многообразное влияние также и на преподавание в Германии. Здесь мы видим картину, *принципиально отличную от той*, какую мы видели в Англии. В то время как англичане строго консервативно держатся за старые учреждения, француз любит новое и часто даже вводит его не путем постепенного преобразования старого, а в форме *внезапной реформы*, которая скорее даже является революцией. Организация преподавания здесь тоже совершенно другая: во Франции мы имеем дело не только с *централизацией экзамена* в форме приемных испытаний при поступлении в высшие школы, особенно парижские, но и вообще *со строго централизованной организацией* всего преподавания. Выс-

*) Young G., Young W. The first book of geometry. — London, 1905.

шая власть — так называемый «Совет по делам высшего образования», в состав которого, кстати, всегда входили также первоклассные ученые-математики, — является полным хозяином и имеет возможность предписывать по своему усмотрению и как угодно часто самые радикальные реформы и изменения. Такие реформы должны в таких случаях сразу же быть проведены во всей стране, и уже дело учителей суметь к ним приспособиться. С индивидуальной свободой отдельного учителя, которую мы в Германии привыкли ценить в высокой степени, во Франции считаются гораздо меньше. Здесь было бы вполне правильным употребить выражение: «система революции сверху».

Что касается специального преподавания геометрии, то его *модернизация*, т. е. освобождение от прежнего следования Евклиду, началась во Франции очень рано, примерно *около* 1550 *г.* Она была только одним из проявлений разыгравшейся в то время великой борьбы нового гуманизма против старой схоластики. Как раз тогда Петр Рамус *), занимавший выдающееся положение среди представителей новых идей не только в математике, но и в других областях, написал учебник математики **).

В нем уже совершенно оставлены как форма, так и материал Евклида; в противоположность последнему для Рамуса, как он сам говорит для характеристики своего учебника в начале первой книги, «геометрия является искусством хорошо измерять». В соответствии с этим *практические интересы* всюду стоят у него на первом месте. Он начинает с объяснения того, как надо производить простые геодезические измерения, описывает инструменты и поясняет все это на многочисленных интересных рисунках. И лишь на втором месте даются у него также и логические дедукции, но ни в коем случае не как самоцель, а только лишь как средство для вывода новых геометрических теорем, которые нельзя получить непосредственно из наблюдения, но которые тем не менее полезны для приложений; при этом, конечно,

*) Латинизированный вариант имени крупного французского философа, логика и математика Пьера де ла Раме.

**) Ramus P. Arithmeticae libri 2, geometricae libri 27.— Basel, 1580.

оттеснение дедукции у Рамуса не заходит настолько далеко, как у Перри.

Такая трактовка геометрии практиковалась во Франции очень долго. Приблизительно через 200 лет после Рамуса (в 1741 г.) появились знаменитые «Элементы геометрии» Клеро *).

Это тот самый Клеро, который известен как выдающийся исследователь; вообще по отношению к Франции в противоположность Германии и Англии можно сделать то наблюдение, что выдающиеся математики из высшей школы всегда с интересом принимают участие в работах по вопросам преподавания. Сочинение Клеро выделяется своим прекрасным стилем. Вообще, французы в высокой степени владеют искусством плавного, удобочитаемого изложения даже трудных отвлеченных вещей, которое представляет самую резкую противоположность однообразной «евклидовой» манере изложения с ее шаблонной расчлененностью. Такие книги читаются, «как роман», и тем опровергают самым решительным образом старый взгляд, будто хорошие научные книги обязательно должны быть написаны скучно. Что же касается *содержания*, то и Клеро исходит исключительно *из практических проблем землемерия* и затем весьма постепенно вводит читателя в круг общих идей, причем строго логический момент несколько стушевывается. В своем очень интересном предисловии Клеро объясняет, почему он выбирает такой порядок изложения: люди вообще получили стимул к созданию геометрической науки как раз от практических задач землемерия, поэтому и теперь еще легче заинтересовать всякого геометрией, если начинать с этих задач, а не с абстрактного построения, состоящего из аксиом и теорем, внутренний смысл которого никто не в состоянии так быстро схватить. Клеро следует здесь, очевидно, тенденции сделать свой труд доступным также и для более широких кругов, а не только для специалистов, отвечавшей тому факту, что тогда математика считалась необходимой частью общего образования правящих слоев общества в несравнимо большей степени, чем в настоящее время.

---

*) Clairaut C. A. Eléments de géométrie. — Paris, 1830.

«Начала» Лежандра и их значение. *Новая эпоха в постановке преподавания* наступила в конце столетия в результате великих переворотов, вызванных *французской революцией* 1789 г.

Если до этого времени речь всегда шла главным образом лишь об образовании людей высшего сословия, в частности, о подготовке к военной карьере, то теперь на первый план выступают новые социальные слои буржуазии, и перед преподаванием ставятся новые цели, в него вводятся новые методы. Здесь я должен выделить два направления в эволюции преподавания геометрии, связанные с двумя высшими школами, основанными тогда в Париже, — с «Политехнической школой» и «Высшей нормальной школой». Первая из них, отвечая потребностям получившей тогда новый подъем техники, должна была готовить гражданских и военных инженеров, а вторая — учителей для старших классов. В Политехнической школе наибольшим влиянием пользовался знаменитый Монж. Он создал там ту постановку преподавания геометрии, которая еще и теперь существует в высших технических школах и подобных им институтах; сюда относятся прежде всего обширные курсы начертательной и аналитической геометрии. Существенным новшеством по сравнению с прежней постановкой преподавания является то, что теперь преуспевают не только немногие особенно интересующиеся слушатели, но благодаря целесообразной организации большое число студентов одновременно плодотворно выполняют каждый свою работу. На современников Монжа произвело особенно сильное впечатление, когда он в первый раз вел практические занятия, при которых до 70 человек одновременно работало над своими чертежными досками.

А в Нормальной школе в это время работал Лежандр, на долгое время оказавший своими знаменитыми «Началами геометрии» *) решающее влияние на преподавание геометрии.

Эта книга приобрела наибольшее после «Начал» Евклида распространение из всех учебников элементарной геометрии, причем замечательно то, что, как я уже указывал, это относится не только к Франции,

*) Legendre A. M. Eléments de géométrie. — Paris, 1794.

где ее переиздавали снова и снова в течение всего XIX столетия, но и к другим странам. В частности, в Америке и Италии она долгое время занимала ведущее положение.

По сравнению с Клеро или тем более с Рамусом книга Лежандра означает *большой шаг назад к Евклиду*. Ее главной целью снова является установление замкнутой абстрактной системы элементарной геометрии. Но, с другой стороны, имеются *и существенные отличия по сравнению с Евклидом*, которые я теперь изложу более подробным образом, имея в виду великое историческое значение Лежандра.

1) Что касается *стиля изложения*, то у Лежандра мы имеем *связный*, *удобочитаемый текст*; по своей внешней форме он гораздо ближе к изложению Клеро, которое я выше восхвалял, чем к манере писания Евклида, расчлененной — я бы даже сказал, изрубленной, — и утомительной своим однообразием.

2) Относительно *содержания* самым существенным является то, что Лежандр в противоположность Евклиду *сознательно пользуется* в геометрии *элементарной арифметикой своего времени*; таким образом, он является сторонником — употребим это слово — *слияния* (*Fusion*) *арифметики и геометрии* и даже охватывает в этом слиянии также и *тригонометрию*, которую он тоже излагает в своей книге.

3) *Принципиальная установка* Лежандра сравнительно с евклидовой *несколько смещена от логической стороны к интуитивной.* Евклид — как я уже достаточно часто отмечал — все свое внимание направляет на систему логических выводов, которую он стремится во всяком случае сохранить свободной от примеси интуитивных элементов; все факты интуиции, которые он считает нужным использовать, он предпосылает собранными в виде своих аксиом и т. д. В противоположность этому Лежандр не боится употреблять при случае интуитивные соображения также и в процесс дедуктивного доказательства геометрической теоремы.

4) Для большей конкретности представляется особенно интересным сопоставить *трактовку иррациональных чисел* у обоих авторов. В 5-й книге Евклида содержится, как мы знаем, подробное определение и исследование понятия иррационального числа

в форме логоса или отношения двух несоизмеримых величин в полной аналогии с современной теорией иррационального числа. В дальнейшем своем изложении Евклид всегда особенно тщательно проводит доказательства тех теорем, в которые по самой природе вопроса входят иррациональные числа, со строгостью, удовлетворяющей даже теперешним нашим требованиям (доказательства по методу исчерпывания!). Лежандр же бегло скользит мимо всех этих пунктов. Числа — как рациональные, так и иррациональные — он считает известными из арифметики, в которой тогда тоже не слишком много ломали себе голову над их строгим обоснованием. Доказательство по методу исчерпывания и тому подобного он не признает; ему представляется совершенно очевидным без всяких пояснений, что предложение, справедливое для всех рациональных чисел, справедливо также и в случае чисел иррациональных. Впрочем, и в этом отношении Лежандр сходится со всеми другими великими математиками своего времени. В прошлом семестре я как раз приводил вам пример такой точки зрения из «Теории аналитических функций» Лагранжа *).

5) Несмотря на такое вольное обращение с логической строгостью в деталях, Лежандр никоим образом не относится равнодушно к *принципиальным вопросам об основаниях геометрии*; в этом смысле он в противоположность своим предшественникам во Франции не только воспринимает с полным интересом евклидову традицию, но даже развивает ее дальше, вводя существенно новые идеи.

О лежандровой теории параллельных прямых. Особенное внимание он уделяет *теории параллельных прямых* и на этом я остановлюсь несколько подробнее. Здесь я имею в виду первые издания книги Лежандра, так как в позднейших обработках как раз в этом отношении внесены большие изменения [188]).

Начну с такого замечания: мы охарактеризовали выше евклидову и обе неевклидовы геометрии тем, что число прямых, проходящих через данную точку параллельно данной прямой, равно единице, нулю или двум. Но вместо этого можно также рассматривать

*) Ср. т. 1, с. 220 [доказательство теоремы о биноме].

сумму углов любого прямолинейного треугольника, что дает такое, как можно доказать, вполне равносильное предыдущему различение. *В случае евклидовой геометрии эта сумма равна* π, *в неевклидовой геометрии первого рода* (*гиперболической*) *она всегда меньше* π *и в геометрии второго рода* (*эллиптической*) *она непременно бывает больше* π. И вот Лежандр желает доказать, что обе последние возможности исключаются. Но доказать это — все равно, что доказать евклидову аксиому о параллельных; поэтому Лежандр может достичь своей цели, только заимствуя у интуиции некоторые простые принципы, неявно включающие аксиому параллельности, и все его искусство сводится к выбору в качестве этих принципов настолько правдоподобных положений, что ни читатель, ни даже, несомненно, сам автор не замечают того, что речь идет фактически о новых ограничительных предположениях (постулатах)[189].

Что касается, прежде всего, невозможности *эллиптической геометрии*, т. е. того, что сумма углов больше π, то в основе весьма примечательного доказательства Лежандра лежит молчаливое *допущение* того, что *длина прямой бесконечна*. Конечно, это — крайне правдоподобное допущение, и в его справедливости не сомневались ни Лежандр, ни кто-либо из его читателей, да и все последующие геометры, предшествовавшие Риману, считали его самоочевидным. И все же эллиптическая геометрия показывает, что со всеми прочими аксиомами совместимо также допущение *конечной* длины у прямой, если только принять, что она *неограниченна* и, следовательно, сама собой замыкается. Необходимо поэтому отдавать себе ясный отчет в том, что вместе с бесконечной длиной прямой вводится новый факт интуиции, имеющий решающее значение.

Чтобы таким же образом исключить возможность *гиперболической геометрии*, Лежандр снова пользуется, не оговаривая этого особо, одним простым интуитивным фактом, в котором никогда не усомнится ничей рассудок, еще, так сказать, не испорченный занятиями геометрией: *если P — какая-либо точка внутри угла, образованного двумя полупрямыми* α, β, *то всегда можно провести через P прямую, которая пересекала бы как* α, *так и* β (рис. 142). При помощи

этого предположения Лежандру удается доказать безупречным образом, что сумма углов в треугольнике никогда не может быть также и меньше π, так что остается в конце концов возможной одна только евклидова геометрия.

Теперь я должен выяснить, *почему этот столь тривиальный факт не имеет места в неевклидовой геометрии первого рода*; тогда только мы сможем вполне

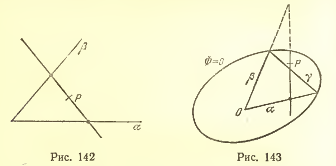


Рис. 142 Рис. 143

понять, почему Лежандру удается, пользуясь этим фактом, исключить названную геометрию. Будем исходить в точности из нашего прежнего изложения.

Пусть α, β — два луча гиперболической геометрии, исходящие из точки O, которая, конечно, должна лежать где-нибудь внутри основного конического сечения $\Phi = 0$ (рис. 143). Тогда всеми параллелями по отношению к α являются лучи, проходящие через точку пересечения луча α этим коническим сечением (т. е. через бесконечно удаленную точку луча α), поскольку они проходят внутри последнего; подобным же образом обстоит с параллелями к β. Поэтому существует прямая γ, параллельная как по отношению к лучу α, так и к β, а именно, прямая, соединяющая точки пересечения лучей α и β с коническим сечением $\Phi = 0$. В евклидовой геометрии это, конечно, не может иметь места. Если теперь взять точку P между α и β, но вне треугольника, ограниченного прямыми α, β, γ (и внутри нашего конического сечения), то для нее лежандрово допущение уже не имеет места: ведь всякая прямая, проходящая через P, пересечет только один из лучей α, β внутри конического сечения, а другой луч она пересечет вне последнего, т. е. в смысле

нашей геометрии вовсе его не пересечет. Но это как раз я и хотел здесь показать.

Последователи Лежандра. После этого отступления мы оставим Лежандра и посмотрим, какими путями пошло после него *дальнейшее развитие преподавания геометрии во Франции*. Замечательно то, что организация школьного дела во Франции в течение XIX столетия изменилась очень мало. Как и вообще во всех культурных областях, учреждения, созданные при Наполеоне I, сохранялись без изменения в течение долгого времени среди всех смен политического режима, так и в преподавании геометрии все еще почти неограниченно господствует Лежандр, если не считать того, что в постоянно возобновляемых *новых изданиях* его учебника (например, 33-е издание — в обработке Бланше — вышло в 1893 г.) происходит известная фильтрация содержания в сторону *ограничения прикладных моментов*, имевшихся еще у Лежандра. А именно, если у самого Лежандра искусство геометрического измерения и не занимает такого выдающегося положения, как у Клеро или тем более у Петра Рамуса, то он не обнаруживает и того пренебрежительного отношения к этому искусству, которое стало обычным впоследствии; в то же время Лежандр проявляет очень живой интерес к технике решения математических задач, к числовым выкладкам. Но все относящееся сюда все в большей и большей степени опускалось в позднейших изданиях; в частности, совершенно выпала глава, посвященная тригонометрии, которую Лежандр особенно тесно увязывал с упомянутыми приложениями. В качестве характерного примера можно назвать так называемую *лежандрову теорему* из сферической тригонометрии. Если на поверхности шара имеется сферический треугольник со сторонами a, b, c и углами α, β, γ (рис. 144), то так называемый *сферический избыток* $\alpha+\beta+\gamma-\pi=E$, как известно, имеет всегда положительную величину. Если стороны не слишком велики по сравнению с радиусом шара, не превосходя, например, на земной поверхности 100 км, то *можно с достаточной для всех практиче-*

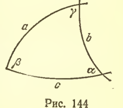


Рис. 144

ских целей точностью заменить сферический треугольник плоским треугольником с углами $\alpha-\frac{E}{3}$, $\beta-\frac{E}{3}$, $\gamma-\frac{E}{3}$. Эту красивую теорему, которая действительно находит большое применение в геодезической практике, Лежандр доказывает весьма просто, ограничиваясь в формулах сферической геометрии одними только первыми членами рядов, выражающих тригонометрические функции. Но в более поздних изданиях книги Лежандра вы напрасно стали бы искать эту теорему.

Наряду с продолжающимися переизданиями Лежандра появляется еще и другая тенденция, характеризуемая обширным «Трактатом по геометрии» Руше и Комберусса *).

Во Франции преподавание математики, предшествующее занятиям в высшей школе, поставлено гораздо шире, чем у нас. Переход к высшей школе осуществляется двухлетним курсом в так называемых «классах специальной математики», в течение которого на математику отводится не менее 16 часов в неделю; этот курс дает всякому, кому позже придется пользоваться математикой, широкое соответствующее образование. Такая постановка дела вызвала потребность ввести в учебники элементарной геометрии *массу нового материала*, что и осуществлено типичным образом в трактате Руше и Комберусса, пользующемся очень большим распространением; в своих многочисленных дополнительных статьях они знакомят учащегося с неевклидовой геометрией, геометрией треугольника, геометрией тетраэдра, учением о важнейших кривых и поверхностях и многими другими вещами.

Реформа преподавания 1902 г. Теперь я перехожу к *новому движению в пользу реформы преподавания математики*, которое началось во Франции около 1900 г. и совершенно сходно с нашими немецкими стремлениями к реформе. Это движение тоже можно поставить в связь со сдвигами, происшедшими во всей картине культурной жизни рассматриваемой эпохи. Невероятный подъем торговли и внешних сношений,

*) Rouché, de Combérousse. Traité de géométrie. — Paris, 1891.

а также техники и промышленности пробуждают во все более и более широких слоях населения настоятельную потребность приобщения ко всем культурным завоеваниям, потребность приобретения знаний во всех областях, среди которых математика занимает далеко не последнее место; при этом, конечно, руководящим мотивом являются не теоретические интересы, а стремление приобрести полезные знания, непосредственно применимые на практике. Но руководителей этого движения ни в коем случае нельзя упрекнуть в плоско утилитарном характере мотивов их деятельности, так как они преследуют высокую цель — поднятие общей профессиональной квалификации.

Характерным для французских условий является то, что эту реформу там начали с обсуждения в палате депутатов в Париже; выбранная палатой комиссия, связавшись с большим числом общественных корпораций, представила подробный доклад о реформе преподавания в средней школе вообще, причем преподавание математики фигурирует лишь как одно из важных звеньев длинной цепи. Главными моментами в этой реформе являются, с одной стороны, *упрощение и бо́льшая наглядность преподавания*, а с другой — *перенесение в курс средней школы ряда вопросов, которые с давних пор считались принадлежностью высшей математики* и которые не только вполне доступны, но и имеют прежде всего величайшее значение для современной культуры, в особенности для естествознания и техники. Я имею в виду *понятие функции, методы графических изображений и начала исчисления бесконечно малых.* Этим самым хотят достигнуть, в частности, гораздо *более тесной* увязки арифметики с геометрией, чем представляли ее себе когда-либо раньше; это высшая степень фузионизма в самом широком смысле слова. Эта реформа была изложена *в учебном плане* 1902 г. и сразу же повсюду проведена в жизнь. В этом единообразии мероприятий проявилось действие вышеупомянутой широкой централизации во Франции также и управления школами, благодаря которой для осуществления такой обширной реформы требуется только соответствующее распоряжение высшей власти. Что касается новых французских учебных планов, то здесь я подчеркну еще раз лишь то, что в них старая элементарная геометрия

в евклидовом понимании очень сильно отступает назад перед лицом современных новых идей. Вы найдете подтверждение этому, если присмотритесь к одному из важнейших учебников геометрии, примыкающих к новым учебным планам, а именно к «Геометрии» Бореля [190]). Это очень интересная книга, в которой материал расположен простым и естественным образом и, с другой стороны, весьма много места отведено вопросам практики.

Влияние «Новых начал» Мере. Замечательно то, что одновременно с этим теперь среди французских преподавателей снова пробуждается интерес также и к вполне логически разработанной учебной системе элементарной геометрии в духе идеалов Евклида. Тут в особенности я должен назвать вам одну весьма выдающуюся книгу «Новые начала геометрии» Ш. Мере, которая хотя и появилась еще в 1874 г., но только в последние годы привлекла к себе внимание более широких кругов *). В своих доказательствах Мере не пользуется ни одним интуитивным фактом, которого он перед этим не формулировал бы в виде аксиомы; таким образом, он развивает *полную систему аксиом геометрии*. Но при этом Мере идет навстречу требованиям действительного преподавания в гораздо большей степени, чем строгие приверженцы Евклида, поскольку он не стремится свести систему аксиом к возможно меньшему числу взаимно независимых предложений и, по существу, формулирует их лишь тогда, когда в них действительно оказывается надобность. Но особенно характерно для Мере то, что он проводит *слияние планиметрии со стереометрией* настолько полно, насколько это только возможно, и, кроме того, в противоположность Евклиду всюду выдвигает на первое место *понятие группы движений* и на нем последовательно базирует все свое построение геометрии. Получается построение, совершенно сходное с тем, которое мы недавно наметили: с самого начала вводятся как параллельные переносы, так и повороты; первые приводят к понятию параллельности, а вторые, — так как сразу же рассматривается пространство трех измерений, — приводят к понятию

*) Méray Ch. Nouveaux éléments de géométrie. — Nouvelle édition. — Dijon, 1903.

перпендикулярности оси вращения по отношению к плоскостям, в которых лежат траектории (окружности) каждой точки.

Упомяну еще о том, что Мере постоянно придает особенное значение *точному проведению всех* необходимых в геометрии *предельных процессов* и при этом пользуется по мере надобности современным понятием числа в его строгой формулировке, хотя он и не идет в слиянии арифметики и аналитической геометрии так же далеко, как делали это мы.

Влияние точки зрения Мере ясно сказывается на современных французских учебниках. Так, понятие движения играет существенную роль в упомянутой книге Бореля; в еще большей мере это видим в новых «Началах геометрии» К. Бурле *), автора многих очень распространенных учебников; здесь всюду вполне отчетливым образом говорится о группе движений и о геометрических величинах как ее инвариантах.

На этом мы расстанемся с Францией и перейдем к Италии.

III. ПРЕПОДАВАНИЕ В ИТАЛИИ

Влияние Кремоны. Здесь мы видим тоже крайне своеобразный ход развития, характеризующийся совершенно иными чертами, чем те, которые мы наблюдали в Англии и Франции; типичное выражение его можно поставить в параллель разве что только с Мере. Я займусь только *современной Италией, начиная примерно с* 1860 *г.* Наибольшее влияние на единообразную реформу преподавания математики в этом новообразованном объединенном государстве имел Л. Кремона — тот самый Кремона, который известен всем вам своим научным значением в развитии современной геометрии; он является *основателем самостоятельного алгебраически-геометрического исследования* в Италии, давшего столь замечательные результаты. В соответствии с этой своей научной деятельностью Кремона оказывал длительное влияние на *преподавание в высших школах,* выдвинув на первое место *проективную геометрию в связи с начертательной геометрией и графической статикой.* Теперь

*) Bourlet C. Eléments de géométrie. — Paris, 1908.

во всем мире инженеры употребляют выражение *Kräfteplan* *) *Кремоны*, и если даже оно исторически и не может быть оправдано, то все же оно ясно свидетельствует о большом влиянии Кремоны.

Замечательно, что на преподавание в средней школе тот же Кремона повлиял в совершенно другом направлении. В знаменитой «Записке» 1867 г. он рекомендует ввести Евклида, если и не как нечто обязательное, то по крайней мере в *качестве образца для всего школьного преподавания геометрии* в отношении расположения и выбора материала, а также главным образом в смысле идеала строго логического, замкнутого в себе построения геометрии. Таким образом, здесь Кремона настаивает в особенности *на логической стороне*, тогда как в его собственной непосредственной преподавательской деятельности, а также в его научной работе на первый план выступают прежде всего *интуитивные моменты*. Трудно понять, что собственно являлось связующим звеном между этими двумя, по-видимому, столь взаимно противоречивыми целеустановками у Кремоны.

Более старые учебники геометрии. Но во всяком случае этот призыв Кремоны 1867 г. упал *на крайне плодородную почву*, и между итальянскими математиками началось форменное соревнование в деле замены Евклида такими учебниками, которые полностью сохраняли бы как его материал, так и всю его тенденцию, но только осуществляли бы последнюю способом, более отвечающим теперешним уточненным требованиям. Характерно, что в этой работе принимает участие, точно так же как и во Франции, ряд крупных ученых-математиков, благодаря чему появляется немало очень ценных в научном отношении работ, правда, в педагогическом отношении, стоящих не столь же высоко. В дальнейшем я хочу отметить только некоторые особенно характерные моменты.

Начну с того, что назову *перевод Евклида*, который издали в 1867 г. Бетти и Бриоски и который положил начало распространению в Италии знакомства с Евклидом. Он содержит, подобно английским школьным изданиям Евклида, только книги 1 — 6, 11 и 12. Но в противоположность английской традиции эти авто-

---

*) Веревочный многоугольник (*нем.*).

ры отнюдь не имеют в виду дать в руки учащимся материал этих книг в его старой форме, а желают лишь дать (преподающим) основу для самостоятельной научной и педагогической переработки.

Из последовавших затем учебников длинный ряд более старых книг еще придерживается по возможности близко евклидовой схемы определений и т. д., причем, однако, явно и точно формулируются все те многочисленные факты интуиции, которыми Евклид пользуется неявно.

Чтобы восполнить пробелы в первой книге, к числу этих молчаливо применяемых Евклидом вещей относят, следуя общепринятому взгляду, также *понятие движения твердого тела* и помещают его поэтому в самом начале системы, формулируя ряд «аксиом движения». Но при этом, подобно Мере, из педагогических соображений не придают никакого значения взаимной независимости отдельных устанавливаемых здесь аксиом. Типичной для этого направления книгой являются очень распространенные «Начала геометрии» Санниа и Д'Овидио *), вышедшие впервые в 1869 г., в которых вы найдете подтверждение всех сделанных мною замечаний. Материал в них тот же самый, что у Евклида, но только представлен он в существенно сглаженной форме. Так, например, всюду избегают использования понятия числа, вырабатываемого в чистой арифметике, но зато яснее, чем это делает сам Евклид, из евклидовых доказательств по методу исчерпывания выделена раз навсегда и изложена лежащая в их основе идея предела. Далее, планиметрия и стереометрия внешним образом стоят порознь, но при этом, очевидно, учтено то, что книгой будут пользоваться в школах с «фузионистским» учебным планом, так как эти стремления к слиянию планиметрии и стереометрии были особенно распространены как раз в Италии. Назову еще хотя бы «Начала геометрии» Р. де Паолиса **), как учебник, наиболее способствовавший этим стремлениям.

Новейшие требования повышенной строгости. Существенно более, чем эти и родственные им книги,

*) Sannia A., d'Ovidio E. Elementi di Geometria. — Napoli, 1869.

**) de Paolis R. Elementi di Geometria. — Torino, 1887.

уклоняются от евклидова изложения *учебники другой группы,* а именно, уклоняются в том отношении, что они стремятся достичь значительно *более высокой степени строгости* в понимании основ. Авторы их полагают, что у Евклида и в названных выше учебниках многочисленные геометрические основные понятия определены недостаточно строго, и хотят вместо этого обойтись одним лишь *единственным основным понятием,* а именно — понятием *точки,* из которого все другие необходимые геометрии образы должны быть построены чисто логическим путем.

В частности, следует *решительно избегать* при обосновании геометрии также пользования понятием *движения* твердого тела.

Кульминационный пункт этого развития представляют, пожалуй, различные учебники Дж. Веронезе, охватывающие всю область геометрии. В данном случае нам не приходится рассматривать его «Основания геометрии многих измерений и многих видов прямолинейных единиц, представленные в элементарной форме» *), так как это не школьный курс, а проведенное в абстрактной форме исследование чисто научной проблемы общей многомерной и «неархимедовой» геометрии. Здесь же нас интересуют его же учебники «Элементарные сведения по наглядной геометрии» **) и «Начала геометрии» ***). Первая книга является *индуктивным введением,* которое должно в наглядной форме ознакомить учащихся низшей ступени с различными геометрическими формами, что соответствует примерно нашему пропедевтическому начальному курсу геометрии. Дело в том, что, согласно всем итальянским учебным планам, *систематическое преподавание геометрии* в собственном смысле начинается там лишь *очень поздно;* поэтому не следует думать, что все эти точные учебники предназначены для ребят в возрасте наших третьеклассников!

«Начала» Веронезе содержат *теоретическое построение* геометрии, причем устанавливаются с чрез-

*) Veronese G. Fondamenti di geometria a più dimensioni ed a più unita rettilinee esposti in forma elementare. — Padova, 1891.

**) Veronese G. Nozioni elementari di geometria intuitiva. — Verona, 1902.

***) Veronese G. Elementi di geometria. — Verona, 1904.

вычайной полнотой *все* постулаты, какими бы очевидными они нам ни представлялись. Так, например, в качестве первого постулата явно устанавливается положение «существуют *различные* точки», — таким образом, мы не рассматриваем, скажем, геометрию, в которой существует только одна точка! Впрочем, при этом всегда хотя бы вкратце упоминается и эмпирическое наблюдение, которое руководит в качестве эвристического принципа при введении аксиом. Что касается деталей, то Веронезе пользуется *прямолинейным отрезком* как основным геометрическим образом, который он определяет как систему точек, удовлетворяющую определенным требованиям. Конгруэнтность таких отрезков вводится в качестве основного понятия, и к нему весьма оригинальным образом сводится все прочее. Так, *два треугольника* называются конгруэнтными, если все их стороны попарно конгруэнтны, чем определяется также и конгруэнтность углов, так что здесь *3-я теорема о конгруэнтности* вводится ранее всего (в качестве определения!); аналогично, с помощью конгруэнтности отрезков, строится даже и *учение о параллельных линиях:* две прямые называются параллельными, если у них имеется центр симметрии, т. е. если они отсекают на всех прямых, проходящих через некоторую точку, попарно равные отрезки. С другой стороны, Веронезе тоже строго придерживается *евклидовых рамок в отношении выбора материала*; в частности, он, конечно, избегает всякого использования арифметики. С этой книгой Веронезе родственны по содержанию «Элементы геометрии» Ф. Энриквеса и У. Амальди *), но только они наряду со строгой систематикой в значительно более высокой степени подчеркивают также и педагогические моменты.

Школа Пеано. Еще дальше, чем Веронезе, пошла в том же абстрактном направлении так называемая *школа Пеано*. Дж. Пеано, живший в Турине, стремился к тому, чтобы провести чисто логическую, свободную от элементов интуиции обработку математики во много раз строже, чем это имело место в рассмотренных до сих пор аксиометрических исследованиях; для этой

*) Enriques F., Amaldi U. Elementi di Geometria. — Bologna, 1905.

цели он придумал особый *язык формул* (так называемую *идеографию*) *), который должен заменить обыкновенный язык. При этом Пеано исходит из той мысли, что иначе невозможно избежать вмешательства нелогических моментов по причине многочисленных ассоциаций, невольно вызываемых привычными нам словами.

Это приводит в конце концов к идеалу, состоящему в том, чтобы *оперировать с символами* (*которые сами по себе лишены всякого значения*) по «*произвольным*» *правилам*, которые тоже в свою очередь сами по себе ничего не должны означать. Пеано основал большую школу, которая теперь в Италии пользуется широким распространением и большим влиянием. Вместе со своими учениками он издает так называемый «Формуляр», в котором все отделы математики должны быть изложены на языке формул со стороны их чисто логического содержания.

Спросим себя, *благоприятствует ли прогрессу* науки такое доведенное до крайности подчеркивание чисто логических моментов? Я воспользуюсь таким сравнением: многие люди, поднимаясь из долины на гору, испытывают удовольствие от вдыхания более чистого и разреженного воздуха; однако отсюда не следует, что все большее и большее разрежение воздуха всегда будет повышать хорошее самочувствие; существует граница, за которой вообще прекращается всякая возможность существования. Подобно этому я полагаю, что то воодушевление, с каким логики стремятся изгнать всякую интуицию (насколько это, вообще, возможно, так как символы Пеано как таковые тоже вносят в его систему еще некоторый остаток интуитивных элементов!), является несколько необдуманным; хотя иные, быть может, вначале и очень приятно себя чувствуют в этой более чистой логике, однако и здесь существует некоторый оптимум в распределении долей логики и интуиции, который нельзя без вреда переходить в сторону увеличения доли первой!

Конечно, с точки зрения чистого *исследования* следует приветствовать всякий новый подход и ожидать от него новых успехов и импульсов. Но в данном случае необходимо вынести наше заключение также и с точки зрения *педагогики*, так как эти абстрактные тен-

*) См. т. 1, с. 28—29.

денции, по-видимому, во многих случаях оказывали влияние также и на школьное преподавание. Такое заключение должно будет носить более отрицательный характер: можно, несомненно, ожидать того, что при школьном преподавании в таком духе многие ученики совсем ничему не научатся, а те немногие, которые вообще в состоянии будут следить за учителем, получат от преподавания во всяком случае не то, что они смогли бы применить в будущем.

Стремления к реформе. И действительно, в Италии уже, по-видимому, наступила реакция против этих чрезмерно абстрактных тенденций в преподавании также и в *высшей технической школе*, так как именно в последних чистые логики во многих случаях, как это ни удивительно, имели перевес. Там теперь жалуются на плохую математическую подготовку средних студентов, которые не в состоянии следить за отвлеченными рассуждениями.

Еще раньше мне рассказывали в качестве примера недостаточной согласованности с действительными потребностями, что на лекциях для инженеров сначала доказывают теорему Тейлора для любого числа переменных и уже после этого рассматривают эту же теорему для одной переменной как частный случай.

Также и по отношению к *преподаванию в средней школе* в последнее время обнаруживаются *стремления к реформе*, которые совершенно в духе нашего и французского движения ставят своей целью отказ от преимущественного направления внимания в сторону абстрактной логики, а также от точного следования Евклиду в выборе материала и оживление преподавания путем введения *наглядных моментов*, путем включения важнейших общих понятий современной науки (*понятие функции*) и, наконец, также путем *увязки с приложениями.* Вождем этого движения является Джино Лориа, который в 1904 г. на 3-м международном математическом конгрессе в Гейдельберге прочитал доклад о преподавании математики в Италии и после того говорил о своем проекте реформы в очень интересном докладе, прочитанном на съезде итальянского союза учителей средней школы «Матезис». Учреждение этого союза свидетельствует о том, что теперь учительские круги Италии проявляют живой интерес к современным идеям, и хотя в новых учеб-

ных планах 1905 г. последние сказываются едва заметным образом, но все же можно, вероятно, рассчитывать на то, что итальянские школы постепенно освободятся от уз крайнего увлечения логикой и получат более современное оформление преподавания.

Теперь, наконец, мы обратимся к нашей родине.

IV. ПРЕПОДАВАНИЕ В ГЕРМАНИИ

Влияние преподавания в народных школах (Песталоцци и Гербарт). Здесь мы включим в наш обзор также и все страны с немецким разговорным языком, каковыми являются немецкая Швейцария и Австрия. Ход развития преподавания в Германии принадлежит к совершенно иному типу, чем в прочих странах. Здесь, прежде всего, *недостает того единообразия* в ходе развития, которое в других странах получалось в результате строгой государственной организации либо вмешательства сильной личности. В Германии преподавание в каждом отдельном государстве развивалось самостоятельно по своим собственным путям и, сверх того, у отдельных учебных заведений, у отдельных преподавателей всегда еще оставался сравнительно большой простор для самостоятельной деятельности. В результате возникло *множество разнородных импульсов из самых различных источников*, и они по большей части успевали оказать свое воздействие еще раньше, чем они были учтены в официальных учебных планах. Здесь я могу выхватить, конечно, лишь немногие точки зрения, которые имели особенно большое значение для *развития преподавания в последние десятилетия*, начиная примерно с 1870 г.

Особенно важная тенденция, которая стала проявляться, начиная с семидесятых годов в связи с возросшей в период национального подъема того времени потребностью широких слоев населения в образовании, имеет своим источником (новые) *движения в области обучения в народных школах*. Я имею в виду тот взгляд, согласно которому *в начальном обучении на первом месте непременно должно стоять непосредственное созерцание*, что это обучение всегда должно быть увязано с видимыми, вполне знакомыми ученику вещами. Эти идеи ведут начало, как известно, от знаменитого швейцарца И. Г. Песталоцци, на которого

вообще надо смотреть как на основателя начального обучения в современном смысле. Время его деятельности приходится круглым счетом на 1800 г. Несомненно, для каждого математика интересно познакомиться с оригинальными произведениями Песталоцци, имеющими отношение к математике; это — «Азбука наглядных представлений или наглядное учение о соотношениях меры» *) и «Наглядное учение о числовых соотношениях» **). Задача этих книг — показать, как можно совершенно неподготовленного ученика довести до полного освоения простейших фактов пространственной и числовой интуиции. Несомненно, что всякого, кто ждет от этих книг чего-либо особенно увлекательного, постигнет большое разочарование; они представляют собой, пожалуй, самое скучное из всего, что только мне случалось когда-либо держать в руках, так как они только излагают очень подробно и с ужасающей систематичностью все возможные тривиальные соотношения. Приведу один только пример: ребенок должен узнать, что квадрат можно разделить горизонтальными и вертикальными линиями на равные части (рис. 145). С этой целью Песталоцци не только приводит таблицу, содержащую все 100 комбинаций делений при помощи 0, 1, 2, ..., 9 вертикальных и горизонтальных линий, но, кроме того, описывает также и в тексте число, положение и т. д. частей, имеющих вид квадратов либо прямоугольников, в каждом отдельном случае все время по одной и той же схеме и притом самым подробным, какой только можно вообразить себе, способом. Это следует, вероятно, понимать в том смысле, что Песталоцци хотел даже самому ненаходчивому народному учителю — а ведь он тогда должен был считаться с совершенно недостаточно подготовленным материалом — дать богатое собрание примеров, из которого учитель мог бы

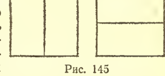


Рис. 145

*) Pestalozzi J. H. Das ABC der Anschauung oder die Anschauungslehre das Massverhältnisse. — Zürich; Tübingen, 1803.

**) Pestalozzi J. H. Die Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse. — Zürich; Tübingen, 1803—1804.

любую часть по своему усмотрению положить слово в слово в основу своего преподавания.

В дополнение я предлагаю здесь вам еще книжечку гёттингенского философа Гербарта, сыгравшего особенно деятельную роль в распространении этих идей. В этой книге («Идея Песталоцци об азбуке наглядных представлений»)*) мысли Песталоцци развиты в не столь схематичной и потому более интересной форме. В частности, Гербарт считает желательным, чтобы ребенок познакомился со всевозможными формами треугольников. Поэтому в одной таблице он дает углы треугольника, а также углы, лежащие справа и слева от высоты, через каждые пять градусов (рис. 146), а в другой таблице соответствующие длины сторон с тем, чтобы заставить ребенка проверить эту таблицу путем измерений. Замечательно также и другое его предложение — запечатлеть в представлении ребенка еще в колыбели различные формы треугольников, помещая перед его глазами таблицы с самыми различными формами треугольников.

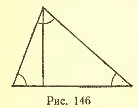


Рис. 146

Пестолоцци и Гербарт оказали *мощное воздействие на преподавание в народных школах*, которое сказывается еще и до сих пор. Вы можете обнаружить ясные следы влияния идей Песталоцци в большинстве учебников геометрии для народных школ.

В очень характерной форме сохранилось до сих пор учение Песталоцци о наглядных представлениях в наших *детских садах*, история которых восходит к нему и соответственно к Ф. Фребелю; в них ребятишки знакомятся с простейшими пространственными формами, играя надлежащим образом подобранными предметами.

Австрийский план Экснера и Боница (1849); забота о развитии пространственной интуиции. Но вскоре эти педагогические идеи проникли и в среднюю школу. В этом отношении особенно характерен учебный план, составленный *около* 1850 *г. для Австрии Экснером и*

*) Gerbart J. F. Pestalozzis Idee eines ABC der Anschauung. — Göttingen, 1802.

Боницем. И в этом случае надо искать в политическом положении объяснение того, почему именно здесь и именно в эту эпоху возникло рассматриваемое движение. В Австрии под влиянием многочисленных школ, принадлежавших католическим монашеским орденам, особенно иезуитскому, в преподавании математики по существу сохранялся догматический метод средневековья, и когда революционное движение 1848 г. смыло все старое, то среди наличного материала ничто не могло послужить отправным пунктом, и поэтому реформаторы вводили новое в самой чистой форме. Этим и объясняется то, что учебные планы Экснера — Боница перенесли в среднюю школу новые наглядные методы, насколько это только было возможно. *Пространственное созерцание* не только культивируется в классах первой ступени как подготовительный курс, но становится *самоцелью.* Следует не только упражнять логическое мышление на наглядных вещах, но речь идет об *упражнении самого созерцания.* На первой ступени (первые четыре года) логическая сторона вообще совершенно стушевывается, дети упражняются только *в наглядном освоении фигур, постоянно сопровождаемом черчением.* На второй ступени, на которой приобретенный таким образом материал подвергается логической переработке, черчение сохраняется в значительном объеме. Многие из вас имели, вероятно, случай заметить, как умело чертят австрийские математики, — один из результатов этой характерной структуры учебных планов.

Переиос этих стремлеиий в Севериую Германию; учебники Хольцмюллера. Эти же самые тенденции стали проникать в начале семидесятых годов также и *в Пруссию* и вообще *в Северную Германию.*

Здесь следует отметить и тот момент персонального характера, что Бониц занял тогда в прусском министерстве народного просвещения руководящий пост. Принципы этой реформы были сформулированы для Пруссии в *учебных планах* 1882 *г.* С внешней стороны их характеризует введение *геометрического* подготовительного курса, так называемой *геометрической пропедевтики во втором классе гимназий*; на этих уроках ученик должен освоиться в наглядной форме с теми вещами, которые позже составят содержание научной системы геометрии.

Учебником, в котором тенденции реформы 1882 г. нашли, пожалуй, наиболее выпуклое выражение, является «Методический курс элементарной математики» Хольцмюллера *). Здесь характерно уже само название: «методический» мыслится как противоположность «систематическому»; курс должен дать не окостенелую дисциплину в духе Евклида, а *естественный ход обучения*, при котором учитываются все данные преподавательского опыта, чтобы наиболее действенным образом помочь учащемуся. Далее, здесь перед нами не учебник одной только геометрии или только арифметики как таковой, но изложена вся элементарная математика с переменным чередованием ее отдельных частей в том виде, в котором их действительно можно проходить, причем ясно выступают также и их взаимные отношения. С другой стороны, изложение геометрических отделов всегда начинается *с черчения и построений*. Особенное значение придается выработке пространственных представлений, *стереометрическому черчению*. Каждый раз требуется не только убедиться в возможности построения, но и действительно *выполнить* его *в чистом и полном виде*. При этом геометрические теоремы часто получаются как бы мимоходом; так, например, теоремы о равенстве треугольников получаются из того наблюдения, что построение треугольника по трем данным его элементам получается однозначным образом. Я должен, далее, отметить, что в соответствии с указанной тенденцией в курс вплетены также отчасти *основные положения проективной геометрии*. Конечно, я не могу умолчать о том, что у Хольцмюллера логические моменты в различных местах оказываются, пожалуй, слишком урезанными, но ведь это старая истина, что невозможно одновременно получить удовлетворительные результаты во всех направлениях. Если подчеркивать преимущественно логику, то страдает наглядность, и наоборот.

Положительные результаты описанных здесь стремлений теперь перешли, пожалуй, всюду в постановку преподавания, но разумеется, стали постепенно присоединяться опять-таки новые импульсы. Сюда относится прежде всего, как и во всех других странах,

*) Holzmüller. Metodisches Lehrbuch der Elementarmathematik. — Leipzig: Teubner, 1894—1895.

сильное движение, начавшееся в Германии около 1890 г. и стремящееся к более сильному подчеркиванию *приложений математики во всех областях естествознания, в особенности же в технике, а также ее значения для всех сторон человеческой жизни*. Это движение вносит по сравнению с тенденцией, преследующей наглядность, нечто существенно новое. А именно, если последнюю можно еще увязать с чисто формальными целями, то здесь речь идет о действительно плодотворном применении математического мышления к различным другим областям. В близком отношении к этим стремлениям находятся те реформаторские тенденции, которых мы так часто касались в первом томе этого сочинения, и которые поэтому мне достаточно здесь просто перечислить: *введение понятия функции, графических методов и начатков исчисления бесконечно малых*; все это дает много новых импульсов также и для преподавания геометрии.

Влияние экспериментальной психологии. Но зато несколько подробнее я остановлюсь на некоторых *новейших тенденциях, идущих еще дальше*, которыми математикам следует заняться более внимательно, чем они это делали до сих пор.

а) В первую очередь я имею в виду *некоторые результаты современных психологических исследований*, в частности, результаты экспериментальной психологии, а также современной гигиены. Уже Гербарт пытался при построении педагогики опереться на психологию, но выполнение этой задачи получило совершенно иную основу с тех пор, как психология выработала для себя точные экспериментальные методы. Подумайте, например, о том, насколько важно для педагогики исследование *памяти*, как важно, например, для нее знать, каким образом факты схватываются памятью и сохраняются в ней, в какой мере это зависит от обстановки или от личного настроения индивида. И действительно, теперь психологи во многих местах, в том числе и здесь, в Гёттингене, много занимаются этими вопросами. Столь же важно для педагогики исследование *утомления*, например, вопрос о том, имеется ли зависимость между физическим и умственным утомлением. В прежнее время полагали, что предшествующее физическое напряже-

ние делает людей особенно способными к умственной работе, теперь же пришли на основании сделанных наблюдений к противоположному взгляду.

Особенно важной в этой области, и притом как раз и по отношению к математике, является проблема *различий в индивидуальной одаренности.* Было время, когда господствовало твердое убеждение в том, что только очень немногие ученики обладают «математическими способностями», желая этим сказать, что только они в состоянии вообще хотя бы что-нибудь понять из математики, тогда как все остальные даже при самом большом напряжении не смогли бы ничему научиться. Объяснение того, что подобный взгляд мог получить столь всеобщее распространение, можно искать исключительно в недостатках господствовавшего тогда метода преподавания. Когда же впоследствии в связи с учебными планами Экснера — Боница стали придавать большее значение педагогическому искусству, то пришли вскоре к противоположному мнению, согласно которому всякий ученик при наличии доброй воли и при некотором напряжении также и со стороны учителя в состоянии научиться чему-нибудь дельному по математике. Я надеюсь, что экспериментально-психологические исследования доставят данные для решения вопроса о том, как с этим обстоит дело в действительности. Несомненно, что даже среди, вообще говоря, способных людей встречаются совершенно «аматематические» индивиды, которым математическое мышление абсолютно чуждо. В том, что среди даже особенно даровитых в художественном отношении натур попадаются такие аматематики, убедил меня недавно очень интересный разговор со знаменитым берлинским архитектором Месселем, который всем вам известен, между прочим, столь же целесообразным, сколь ценным в художественном отношении зданием универмага Вертхайма. Когда он услыхал, что я математик, то стал говорить самым резким образом о всем том бесполезном хламе, которым так много мучают в школе и который во всяком случае для него лично всегда оставался не имеющим никакой пользы. Быть может, было бы умнеее предоставить подобным натурам пройти курс школы без всякой математики, чем напрасно биться над тем, чтобы сообщить им хотя бы какие-нибудь

математические знания. При этом большей частью добиваются только того, что возбуждают в них сильнейшее отвращение к этим вещам, которых они не в состояиии понять, и тем создают для математики влиятельных врагов. Разумеется, это относится только к очень немногим натурам, которые при прекрасных задатках в прочих отношениях лишены односторонним образом математических способностей, и это отнюдь не должно быть использовано как аргумеит в защиту лености и праздности или той старой теории о «всеобщей неспособности к математике».

Дальнейшие важные задачи, которые математика ставит перед психологией, относятся к имеющимся *более тонким различиям в характере математического дарования*, которые проявляются у продуктивно иаучно работающих математиков, но имеют несомиенио большое значение и для педагогики. Ведь каждый деиь приходится иаблюдать, что один математик более расположен к абстрактио-арифметическим исследоваииям, а другой предпочитает оперировать с геометрически-наглядными образами. Уже проведено, в частности, психологическое обследование таких людей, выработавших в себе выдающиеся способности в одной какой-нибудь узко ограиичеииой области, как *знаменитые вычислители* или *шахматные игроки*, и в этих случаях тоже обнаружили огромные различия: так, теперь известно, что те большие числа, с которыми вычислители производят действия, одни из них как бы видят перед собой записаиными с помощью цифр (*зрительное* предрасположение), тогда как другие работают *аудитивно* (иа слух), связывая свои ассоциации со звуками слов, выражающих числа. Рекомендую вам в этом отношении интересиую книгу Бине «Психология знамеиитых вычислителей и игроков в шахматы» *).

Отношение к современному художественному воспитанию.

b) Вторая тенденция, часто проявляющаяся в последнее время, о которой я хочу еще здесь упомянуть, соприкасается с тем, что я говорил о математической предрасположеиности лиц с выдающимися художественными дарованиями; я имею в виду современное

*) Binet. Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'echecs. — Paris, 1894.

так называемое *художественное воспитание* и нововведения в современном *преподавании рисования*. Здесь цель заключается в том, чтобы как можно скорее довести ученика до живого *интуитивного* представления вещей в целом, в большом, а не начинать с изучения их деталей. Особенно интересным представляется это стремление, проявляющееся также сходным образом у некоторых выдающихся инженеров, в развитии преподавания рисования. В прежнее время главное значение во многих случаях придавали тому, чтобы каждый ученик научился в точности воспроизводить определенные контуры по данным образцам — прием, который слишком часто имел своим результатом слабый интерес и слабые успехи. Я вспоминаю, как в мое школьное время я должен был снова и снова копировать все время одну и ту же арабеску, потому что она никак не удавалась мне, что нисколько, разумеется, не содействовало развитию у меня способности рисовать. Теперь же, в противоположность этому, ребенку дают в руки с самого начала кисть и краски и представляют ему срисовывать (красками) по собственному его впечатлению простые, повседневные предметы в том виде, как он их видит непосредственно перед собою, либо по воспоминанию. При этом отнюдь не преследуется задача точного воспроизведения деталей; они могут быть крайне неточны, если только схвачено общее впечатление. Теперь можно видеть всюду на школьных выставках, какие поразительно хорошие результаты достигаются этим методом даже и у детей без всякого специфически художественного дарования.

Конечно, это направление *представляет собой полную противоположность математическому черчению*, поскольку последнее должно ставить на первое место точное, даже количественно правильное фиксирование всех деталей. Естественно, что эти две тенденции легко могут затеять самую ожесточенную борьбу между собой, если одна либо другая применяется слишком односторонне. Так, например, бывает, что в начертательной геометрии с большим трудом строят очень много отдельных точек кривой, но так как за недостатком необходимых изобразительных навыков эти точки получаются, быть может, очень неточно, а чертящий не имеет правильного представ-

ления о том, как должна выглядеть кривая, то он проводит через эти точки вместо правильной кривой невообразимые каракули, которые во всяком случае не дают никакого представления о подлежащих изображению действительных пространственных объектах. Точно так же и художественное рисование может перейти в карикатуру; детали получаются до того расплывчатые, что если на некотором расстоянии и можно надеяться что-нибудь узнать, то уж вблизи видна только одна неопределенная мазня. Но я полагаю, что при разумном руководстве оба направления *вполне* могли бы *согласоваться* и взаимно дополнять одно другое, и это было бы крайне желательно в интересах дела. И для самой математики было бы весьма нецелесообразно занять здесь принципиально враждебную позицию по отношению к новому, быстро развивающемуся движению.

Шопенгауэрова критика математики; замечания о доказательствах пифагоровой теоремы. В связи со всем этим я хотел бы еще упомянуть о часто цитируемой, чрезвычайно резкой критике знаменитого философа Шопенгауэра, направленной против математики, так как эта критика необычайно характерна для враждебности по отношению к нашей науке со стороны натур, более предрасположенных к искусству. Шопенгауэр считает цепь отдельных логических выводов, которую должно содержать строгое математическое доказательство, недостаточной и невыносимой. Он хочет сразу, так сказать, *с одного* взгляда, *интуитивно* убеждаться в истинности теоремы; это привело его к теории, согласно которой наряду с логическими дедукциями, исходящими из определенных предпосылок, существует якобы еще *другой* метод математических доказательств, который выводит математическую истину непосредственно из интуиции. С этой точки зрения он в своем главном произведении «Мир как воля и представление», как и в других сочинениях, самым страстным образом принципиально осуждает всю евклидову систему; в особенности, *евклидово доказательство пифагоровой теоремы* служит предметом его нападок. Он называет это доказательство «мышеловочным»: оно, пожалуй, действительно в конце концов заставляет согласиться со справедливостью утверждения тем, что коварно запирает

поочередно все, какие только могут быть, выходы, но никогда не приводит к *внутреннему познанию* истины. Ни один математик не может согласиться с Шопенгауэром в этих его рассуждениях, ибо какую бы огромную роль ни приписывали мы в математике интуиции как эвристическому принципу, содействующему прогрессу науки, но в конце концов в качестве последней единственно решающей инстанции должно будет выступить логическое доказательство, которое исходит из сделанных предположений.

Укажу в связи с этим на очень интересно написанную академическую торжественную речь «О ценности и мнимой непригодности математики» А. Прингсхайма *), в которой как раз подробно рассматриваются нападки Шопенгауэра.

Конечно, если бы Шопенгауэр нападал только на раздробленную, лишенную плавности *форму* изложения у Евклида, если бы он желал более наглядной разработки идей каждого доказательства и вообще *наряду* с логикой более полного признания роли интуиции, то с ним можно было бы вполне согласиться. Но и в таком случае *евклидово доказательство теоремы Пифагора* оказалось бы не очень подходящим объектом для его нападок; дело в том, что именно это доказательство я считаю по самой его идее, если отвлечься от внешних качеств евклидовой манеры, *особенно наглядным*, как ясно видно из такого его изложения.

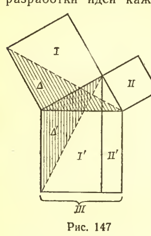


Рис. 147

Чертим известную фигуру (рис. 147) прямоугольного треугольника с квадратами *I*, *II* на катетах и с квадратом *III* на гипотенузе; опускаем на гипотенузу высоту треугольника, продолжение которой делит

*) Pringsheim A. Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik//Jber. deutsch. Math.-Ver. — 1904. — Bd. 13. — S. 357.

квадрат III на два прямоугольника I' и II'', так что

$$III = I' + II'. \qquad (1)$$

Теперь покажем, что прямоугольник I' равен [191]) квадрату I. Для этого проводим обе вспомогательные пунктирные прямые и рассматриваем наискось заштрихованный треугольник Δ и вертикально заштрихованный треугольник Δ'. Первый из них имеет, очевидно, с квадратом I общее основание и высоту и поэтому, как известно, равен его половине:

$$\Delta = \frac{1}{2} I.$$

Точно так же вертикально заштрихованный треугольник Δ' равен половине прямоугольника I':

$$\Delta' = \frac{1}{2} I'.$$

Наконец, усматриваем, что оба треугольника конгруэнтны и, следовательно, равны по площади:

$$\Delta = \Delta',$$

а потому действительно

$$I = I'.$$

Таким же образом можно доказать, что

$$II = II',$$

откуда в связи с (1) действительно вытекает пифагорова теорема

$$III = I + II.$$

Таким образом, здесь доказательство проведено совершенно коротко и, казалось бы, вполне ясным для всякого человека способом. При этом интуиция и логика переплетаются таким образом — и в этом я вижу идеал, — что *каждый логический шаг тотчас же приводится также к наглядной очевидности.* Вспомогательную теорему

$$\Delta = \frac{1}{2} I,$$

которой мы здесь пользуемся, тоже можно, как из-

вестно, сделать вполне наглядно ясной при помощи рис. 148, на котором Δ получается из половины квадрата *I* путем сдвига отдельных горизонтальных полосок (принцип Кавальери!). Конечно, в том, чтобы эти простые идеи получили правильную и ясную форму, существенную роль играет более плавное по сравнению с евклидовою окостенелою схемою *изложение* и удачно выбранные *обозначения.* Особенно я настаиваю на том, чтобы еще шире применять в преподавании для различения линий и площадей различные

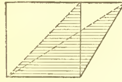
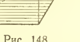



Рис. 148

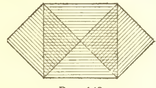


Рис. 149

штриховки или еще лучше, что, к сожалению, в настоящем тексте не осуществимо, *различные краски* вместо евклидова приема обозначать буквами исключительно только углы; несравненно легче найти «красный» или «желтый» треугольник, чем медленно разыскивать сначала вершины E, K и L в сложной фигуре.

Таким образом, я полагаю, что нападки Шопенгауэра на евклидово доказательство по существу совершенно несправедливы; это станет еще яснее, если посмотреть, чем он желал бы его заменить. Он дает известное доказательство Платона (рис. 149), которое действительно можно понять при одном взгляде на чертеж, и ограничивается тем, что требует подобного же и для общего случая. Но ведь это приводит как раз к евклидову доказательству в разумном его изложении, и действительно оба доказательства, если посмотреть в корень вещей, совершенно в равной мере составлены из логики и из интуиции с той лишь разницей, что случай Шопенгауэра как более специальный позволяет, естественно, и несколько более простое решение, так что здесь и для неопытного в этих вещах человека легче сразу интуитивно постичь содержащуюся в доказательстве цепь логических выводов.

Новейшие воздействия со стороны высшей школы. Но довольно о Шопенгауэре; разрешите теперь закончить наши *замечания, относящиеся к развитию преподавания геометрии в Германии.* До сих пор мы, по существу, следили лишь за той линией развития, которая началась с тенденцией Песталоцци — Гербарта, имевших в виду сначала обучение в народных школах. Теперь мы рассмотрим, какое влиянине на преподавание в средней школе оказало у нас в Германии *преподавание* математики *в высшей школе.* Здесь перед нами раскрывается гораздо менее утешительная картина, чем в других странах. Как раз в геометрии обнаруживается то вызывавшее так много нареканий явление, что высшая и средняя школы двигались по совершенно различным путям без всякого живого взаимодействия между ними. Исключением являются в первой половине XIX столетия представители так называемой новой геометрии, в особенности Мёбиус и Штейнер, работы которых мы уже не раз цитировали в этом курсе. Но позже одновременно с большим подъемом математической науки эта отчужденность все более и более усиливается, и только в последнее десятилетие мы можем с чувством удовлетворения констатировать возобновление живых попыток заполнить эту пропасть.

В качестве самого выдающегося явления в этом направлении я снова назову вам «Энциклопедию элементарной математики» Г. Вебера и И. Вельштейна. Впрочем, в этой энциклопедии не вполне реализовано то, что я считаю желательным для школы, в частности, в геометрических частях составители во многих случаях ограничиваются тем, что развивают, правда, в очень интересной, но и крайне абстрактной форме некоторые вещи, которыми они сами особенно много занимались, тогда как было бы лучше дать общую ориентировку относительно *всей области* геометрии, поскольку она имеет отношение к школьному преподаванию. В противоположность этому вы ведь знаете из моих неоднократных заявлений, в чем именно я вижу *конечную цель моих собственных лекций.* Я хотел дать *общую картину всей геометрии*, в которой равномерно были бы представлены все ее части и которая позволяла бы охватить их все одним взглядом вместе с их взаимоотношениями. Разумеется, я

мог лишь в качестве постулата утверждать, что следует пытаться исследовать в соответствии с отдельными устанавливаемыми здесь точками зрения, что именно из всего этого материала приемлемо для школы и насколько вообще можно учесть наши результаты в школьном преподавании.

Австрийский учебный план 1900 г. и «Курс» Генрици и Трейтлейна. Уже много раз брались за разрешение этой проблемы, но в действительности никогда еще ее не разрешили; и я не могу не упомянуть еще хотя бы о следующих двух интересных публикациях, в которых значительная часть относящихся сюда вопросов переработана с единых точек зрения. Одна из них — *австрийский учебный план* 1900 *г.*, который придерживается основ *реформы Экснера — Боница* 1850 *г.* Как и в той реформе, здесь различается первая и вторая ступени гимназии (каждая по 4 года), причем на первой ступени преподавание геометрии проводится исключительно в наглядной форме в соединении с очень большим курсом черчения; последний продолжается также и на второй ступени наряду с начинающимся там логическим курсом геометрии. Самым интересным в этом учебном плане являются *подробные объяснения*, относящиеся к преподаванию математики, которые выдают крайне сведущего составителя, но мне не удалось узнать его имени. Здесь перед нами отрадный контраст с обычными официальными учебными планами, которые в математической части бывают по большей части столь сжато составлены, что из них едва ли можно почерпнуть что-либо определенное.

Вторая публикация, которую я хотел назвать, — «Учебник элементарной геометрии» Генрици и Трейтлейна *). В нем составители с успехом попытались учесть результаты новых по тому времени исследований, *проективную геометрию*, а также *приложения;* излагается также и *аналитическая геометрия* в органической связи с прочим материалом, а именно, с *тригонометрией.* В частности, отмечу, что *подразделение материала происходит по классам геометрических преобразований*, как мы это делали выше и как

*) Henrici, Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie. — Leipzig, 1882—1883.

впервые поступил Мёбиус в своем «Барицентрическом исчислении»: конгруэнтность, подобие, перспективное соответствие.

Что же касается приложений, укажу, что в конце второй части находится *межевая карта великого герцогства Баден* (авторы сами баденцы), так что учащийся получает живой образ цели тригонометрии; я считаю, что от такой живой связи с отечествоведением, подкрепленной действительным выполнением измерений на местности, преподавание выигрывает чрезвычайно. По аналогии в наших школах следовало бы, например, показать гауссову съемку королевства Ганновер, так что каждый ученик узнал бы, в чем заключается ее связь со знаменитым треугольником Высокий Гаген — Брокен — Инзельсберг. Таким образом, книга Генрици — Трейтлейна *в высшей степени заслуживает внимания*. Конечно, с теперешней точки зрения можно сожалеть, что в ней отсутствуют те *общего характера преобразования*, выходящие за пределы линейных преобразований проективной геометрии, которые мы выше рассматривали, и что в связи с этим не приняты во внимание также и современные требования *функционального мышления* и т. д.; не достает также и *философского заключительного отдела* (т. е. разъяснений, относящихся к аксиоматике и т. п.), о желательности которого для старших классов школы теперь часто говорят.

Мы подошли теперь, уважаемые слушатели, к концу наших совместных занятий; если мне и случилось уже многое рассказать вам в последнем разделе о том, как теперь повсюду в школах забила свежая струя, то все же я думаю, что проблема реформы преподавания математики вообще и, в частности, геометрии выдвинется в ближайшие годы в несравненно большей мере в центр общего интереса. Вы все призваны сотрудничать по мере сил в разрешении этой столь важной задачи — сотрудничать на основе самостоятельного размышления обо всех относящихся сюда вопросах и свободно от гнета всесильной окаменелой традиции. Вы будете в состоянии сделать это, если составите себе достаточно общее представление обо всех относящихся сюда областях науки и об истории их развития, а для этого — хочу надеяться — вам дали некоторую основу эти мои лекции.

ПРИМЕЧАНИЯ

1. Термин «относительные» числа, некогда бытовавший и в нашей школе, означает рассмотрение чисел вместе со знаками, т. е. одновременное рассмотрение как положительных, так и отрицательных чисел (в противоположность «абсолютным», т. е. положительным, величинам, — в соответствии с чем модуль числа назывался его «абсолютной величиной»). Сейчас эта терминология становится архаичной. Чтобы отметить, что допускаются к рассмотрению как положительные, так и отрицательные числа, просто говорят о *действительных числах*; вместо термина «абсолютная величина числа» сейчас применяют термин *модуль числа* (см. также примечание 18 на с. 384 первого тома). Заметим, впрочем, что в современных алгоритмических языках взятие модуля числа M обозначается через ABS(M).

2. Используемые Клейном факты аналитической геометрии можно найти в учебниках. См., например, Постников М. М. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1973; Делоне Б. Н., Райков Д. А. Курс аналитической геометрии. — Т. 1. — М.: Гостехиздат, 1948. — Т. 2. — М.: Гостехиздат, 1949.

3. Здесь и далее Клейн говорит о наглядно понятном способе выбора одной вполне определенной системы координат, связанном с нашими представлениями о реальном пространстве. Например, если учитель стоит перед классной доской, то он может говорить о направлениях «вправо», «вверх», «вперед» (от классной доски), и этот способ выражения будет понятен всем сидящим в классе учащимся. *Математически* же речь идет о том, что мы *фиксируем* на прямой какое-либо положительное направление и *условливаемся* называть его направлением вправо; иначе говоря, точка B нашей прямой считается лежащей *правее* точки A, если вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет направление, совпадающее с фиксированным направлением на этой прямой. Аналогично, когда речь идет о плоскости или пространстве, предполагается *фиксированной* некоторая система координат, и под направлениями вправо, вверх, вперед понимаются направления осей x, y, z этой системы.

4. В реальном пространстве направления «вправо», «вверх», а также «по» и «против» часовой стрелки понятны учащимся, если, например, учитель делает чертежи на классной доске. Приведенная формулировка приобретает математически точный смысл при следующих соглашениях. Мы фиксируем на плоскости одну прямоугольную систему координат и принимаем направления ее осей x, y за направления «вправо» и «вверх». Далее, направление вращения, при котором ось x фиксированной системы переходит в ось y в результате поворота на 90°, условимся считать направлением *против* часовой стрелки (положительное направление вращения), а противоположное направление — направлением вращения *по* часовой стрелке. При этих соглашениях приведенная формулировка и ее доказательство сохраняются.

5. Это утверждение имеет ясный смысл в реальном пространстве, поскольку, как бы мы ни располагались в пространстве, мы, видя перед собой плоскость, считаем понятным, что означает направление по или против часовой стрелки в этой плоскости. Однако точная математическая формулировка этого утверждения близка к тавтологии. В самом деле, пусть в смысле фиксированной системы координат xyz, введенной в пространстве, точка A находится *перед* плоскостью xy (в которой определено — с помощью осей x и y — направление вращения по часовой стрелке и против нее). Пусть, далее, с помощью непрерывного перемещения в пространстве (или, иначе, с помощью движения с положительным определителем) точка A и плоскость xy переводится соответственно в точку C и плоскость γ. Тогда с помощью этого движения направление вращения против часовой стрелки в плоскости xy переводится в такое направление вращения в плоскости γ, которое считается наблюдаемым из точки C как направление тоже против часовой стрелки. Иначе говоря, направление вращения определяется с помощью движений с положительным определителем. Но то, что при таких преобразованиях сохраняется знак в формуле объема, очевидно.

6. Об использовании знаков отрезков в элементарной геометрии и преимуществах этих соглашений имеется специальный раздел в превосходной книге: Адамар Ж. Элементарная геометрия. — Ч. 1: Планиметрия. — 2-е изд. — М.: Учпедгиз, 1957. — Ч. 2: Стереометрия. — 2-е изд. — М.: Учпедгиз, 1958.

7. Об ангармоническом отношении, гармонических четверках точек и их роли в проективной геометрии Клейн пишет в дальнейших частях книги. По поводу основных понятий проективной геометрии см. следующие книги: Глаголев Н. А. Проективная геометрия. — М.; Л.: ОНТИ, 1936; Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — 3-е изд. — М.: Наука, 1981; Кокстер Х. С. М. Действительная проективная плоскость. — М.: Физматгиз, 1960; Ефимов Н. В. Высшая геометрия. — 6-е изд. — М.: Наука, 1978; Болтянский В. Г. Элементарная геометрия. — М.: Просвещение, 1985.

8. Клейн для простоты ограничивается в начале своих лекций лишь определителями третьего порядка. Если же взять определитель четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(который, очевидно, равен нулю из-за совпадения двух столбцов), то получится более простое и общее доказательство, не требующее предположения $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, где x_0, y_0 — координаты точки O. В самом деле, разлагая этот определитель по элементам последнего столбца, получаем соотношение

$$-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

которое совпадает с равенством $(1, 2, 3) = (O, 2, 3) + (O, 3, 1) + (O, 1, 2)$.

9. Доказанное тождество дает важную и интересную интерпретацию *барицентрических координат* с помощью площадей; Клейн об этих координатах пишет ниже. См. также Балк М. Б., Болтянский В. Г. Геометрия масс. — М.: Наука, 1987. — (Библиотечка «Квант»).

10. Об аксиомах, лежащих в основе определения общего понятия площади, можно (в синтетическом изложении) прочитать в следующих книгах: Лебег А. Об измерении величин. — М.: Учпедгиз, 1960; Рохлин В. А. Площадь и объем//Энциклопедия элементарной математики. — Книга V: Геометрия. — М.: Наука, 1966. — С. 5—87; Болтянский В. Г. Третья проблема Гильберта. — М.: Наука, 1977. Во всех этих источниках площадь трактуется как *положительная* величина. В книге: Лопшиц А. М. Вычисление площадей ориентированных фигур. — М.: Гостехиздат, 1956, дается изложение, близкое к идеям, о которых пишет Клейн.

11. Если, как на рис. 14, на кривой выбрано направление обхода против часовой стрелки (в случае противоположного направления обхода получится площадь, взятая со знаком минус).

12. Для того чтобы ситуация была яснее, на рис. 15 и 16 удобно взять начало координат в точке самопересечения кривой, а на рис. 17 — в левой из двух точек самопересечения.

13. То есть так, что направление вектора dp получается из направления вектора 12 (с началом 2 и концом 1) поворотом на $\pi/2$ против часовой стрелки.

14. Конечно, точки A_1 и A_2 должны полностью (и притом однократно) описать соответственно кривые, ограничивающие площади F_1 и F_2.

15. Или иначе, *барицентрами* (от латинского слова baris — тяжелый). Сейчас чаще говорят «центры масс».

16. Или, чаще, барицентрическими координатами. Более подробно о барицентрических координатах и их применениях в геометрии можно прочитать в книге В. Г. Болтянского и М. Б. Балка «Геометрия масс», указанной в примечании 9. В частности, геометрическое определение масс m_1, m_2, m_3, задающих положение точки P (которую обозначим через O) относительно треугольника с вершинами 1, 2, 3 имеет вид

$$m_1 = \frac{(O,\,2,\,3)}{(1,\,2,\,3)}, \quad m_2 = \frac{(1,\,O,\,3)}{(1,\,2,\,3)}, \quad m_3 = \frac{(1,\,2,\,O)}{(1,\,2,\,3)}.$$

17. Ее можно получить, записав (ср. примечание 8) равный нулю определитель пятого порядка, в первых трех столбцах которого стоят абсциссы, ординаты и аппликаты точек O, 1, 2, 3, 4, а в двух последних столбцах все элементы равны единице. Разлагая этот определитель по элементам последнего столбца, мы непосредственно получаем формулу

$$(1,\,2,\,3,\,4) = (O,\,2,\,3,\,4) - (O,\,1,\,3,\,4) + (O,\,1,\,2,\,4) - (O,\,1,\,2,\,3),$$

отличающуюся от формулы, написанной у Клейна, лишь очевидными перестановками строк в определителях четвертого порядка, выражающих объемы тетраэдров.

18. Необходимо сделать некоторые замечания относительно того, что Клейн понимает под многогранником. Выше под многоугольником понималась произвольная замкнутая ломаная (воз-

можно, самопересекающаяся). Если отвлечься от сложностей, связанных с возможным слиянием нескольких вершин в одну, можно сказать, что в каждой вершине многоугольника сходятся ровно две его стороны, которые называются *смежными* (точки самопересечения ломаной вершинами не считаются).

Многогранник считается составленным из конечного числа многоугольников (в указанном понимании), каждый из которых лежит в некоторой плоскости. Эти многоугольники называются *гранями* многогранника. При этом, для того чтобы конечный набор многоугольников представлял собой многогранник, необходимо выполнение двух условий: во-первых, многоугольники-грани должны либо примыкать друг к другу целой стороной, либо иметь общую вершину, либо совсем не иметь общих точек и, во-вторых, многоугольники-грани должны примыкать друг к другу общими сторонами *по два*. Иначе говоря, если a — некоторое ребро многогранника, т. е. сторона одной из граней, то должна найтись еще ровно одна грань, примыкающая к этому ребру a.

Если теперь на каждой грани задать некоторое направление обхода, то на общем ребре двух граней взятые направления обхода могут определять либо одинаковое, либо противоположное направление. *Правило ребер* Мёбиуса считается выполненным, если на *любом* ребре две примыкающие к этому ребру грани определяют *противоположные* направления. Если правило ребер Мёбиуса выполнено, то говорят также, что направления обхода, взятые на всех гранях многогранника, являются *согласованными*.

19. Это утверждение о «сумме» многогранников надо здесь понимать лишь в том смысле, что *объем* тетраэдра (*1*, *2*, *3*, *4*) равен сумме объемов четырех указанных «тетраэдров-частей» при указываемом порядке вершин.

20. Здесь Клейн предполагает, что в плоскости рассматриваемой грани в качестве направления «против» или «по» часовой стрелке принимается то, которое мы получаем, наблюдая эту плоскость из точки O. Только после того как в плоскости установлены направления против и по часовой стрелке, можно определить площадь многоугольника (возможно, самопересекающегося), на контуре которого задано направление обхода.

21. Это неточность: никакой знак уже присоединять не нужно, поскольку площадь основания (*1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*) может быть положительной или отрицательной, в зависимости от чего объем пирамиды (получающийся при умножении площади основания на треть высоты) будет положительным или отрицательным.

22. Пусть O' — точка, отличная от O. Заменяя в формуле на с. 31 точку *4* на O', перепишем эту формулу в виде

$$(O', 1, 2, 3) - (O, 1, 2, 3) = (O', O, 1, 2) + (O', O, 2, 3) + (O', O, 3, 1).$$

Аналогичная формула справедлива не только для треугольника (*1*, *2*, *3*), но и для произвольного многоугольника, на контуре которого задано определенное направление обхода. Если теперь на всех гранях многогранника заданы направления обхода, согласованные друг с другом, то при суммировании написанных соотношений по всем граням многогранника мы для каждого ребра (a, b) получаем в правой части два слагаемых (O', O, a, b) и (O', O, b, a) ввиду наличия двух граней, примыкающих к

этому ребру. Иначе говоря, правая часть соотношения, получающегося в результате суммирования, равна нулю, т. е. разность объемов, получающихся, если исходить от точки O или от точки O', равна нулю. Этим и устанавливается независимость результата от выбора точки O.

23. Если в трехмерном пространстве задана замкнутая, не пересекающая себя поверхность, составленная из плоских многоугольников (рассматриваемых не как контур, а как часть плоскости), то она ограничивает некоторую область пространства (*внутреннюю* ее область). Теперь для каждой грани рассматриваемой многогранной поверхности можно задать такое направление обхода, которое из близких к этой грани точек, расположенных во *внешней* области, наблюдается как направление по часовой стрелке. Это дает, как легко понять, *согласованные* направления обхода на всех гранях рассматриваемой многогранной поверхности. Таким образом, для замкнутой многогранной поверхности, не пересекающей себя, можно задать на всех гранях согласованные направления обхода, и это позволяет определить *объем* соответствующего многогранника (т. е. объем внутренней области, ограничиваемой рассматриваемой поверхностью).

Напротив, среди замкнутых многогранных поверхностей, *пересекающих* себя, существуют как поверхности, на которых можно задать согласованные направления обхода на всех гранях, так и поверхности, для которых это не удается сделать. Таковыми являются *односторонние поверхности*, не разрезающие близлежащие точки на две области (внутреннюю и внешнюю), а имеющие лишь *одну сторону*. Такую поверхность (лист Мёбиуса) Клейн и описывает ниже.

24. Эта поверхность была независимо от Мёбиуса открыта Листингом.

25. Подробное описание листа Мёбиуса и его свойств (а также рисунок, изображающий деятельность маляра, о которой пишет Клейн) можно найти в книге: Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. — М.: Наука, 1982. — (Библиотечка «Квант»). Заметим, что лист Мёбиуса является *незамкнутой* поверхностью (он имеет край); только поэтому его и удается реализовать в трехмерном пространстве без самопересечений (в виде перекрученной бумажной ленты). *Замкнутую* же одностороннюю поверхность, как вытекает из сказанного в примечании 23, *невозможно* реализовать в трехмерном пространстве без самопересечений.

26. Эта замкнутая односторонняя поверхность («перекрученная пятигранная пирамида», как ее называет Клейн) *топологически эквивалентна проективной плоскости.* Самопересекающийся семигранник, о котором ниже пишет Клейн (он был впервые в литературе упомянут Рейнхардтом в 1885 г.), также представляет собой замкнутую одностороннюю многогранную поверхность, топологически эквивалентную проективной плоскости (т. е. обе замкнутые многогранные поверхности гомеоморфны между собой).

Отметим, что Клейну принадлежит открытие еще одной замкнутой односторонней поверхности, называемой теперь *бутылкой Клейна*; она может быть, например, получена, если два листа Мёбиуса склеить их краями. Подробнее обо всем этом см. в книге, указанной в предыдущем примечании. Об общем определении ориентации и ориентируемых многомерных многообразиях см.

книгу: Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — 2-е изд. — М.: Наука, 1986.

27. Это утверждение верно при условии, что хотя бы одно из чисел X, Y отлично от нуля. Об исключительном случае $X = Y = 0$ (получающемся при совпадении точек *1* и *2*) Клейн говорит ниже.

28. Иначе говоря, речь идет о множестве всех движений (системы координат) с определителем $+1$. Каждое такое движение может быть осуществлено непрерывным перемещением прямоугольной системы координат в ее плоскости; это и имеет в виду Клейн, говоря о движениях «в буквальном смысле слова».

29. Здесь Клейн несколько краток. При рассмотрении геометрических свойств фигур нужно рассматривать не одну, а несколько различных групп преобразований координат (или преобразований плоскости). Для элементарной геометрии наиболее важны две группы. Первая из них — обозначим ее через P и назовем *группой подобий* — состоит из всех преобразований координат, которые могут быть получены композициями указанных выше преобразований (A_1) — (A_4). Вторая группа — обозначим ее через D и назовем *группой движений* — состоит из всех преобразований координат, получающихся композициями преобразований (A_1) — (A_3). Формул, инвариантных относительно всех преобразований группы D, *больше*, т. е. эта группа определяет более обширный набор геометрических свойств, чем группа P. Так, например, формула $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, определяющая длину d отрезка с концами в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2), инвариантна относительно всех преобразований группы D, но перестает быть инвариантной, если мы перейдем к группе P (при изменении масштаба длина отрезка изменяется). Иначе говоря, группа D соответствует рассмотрению геометрических свойств фигур при *фиксированной единице* длины. Напротив, *отношение* длин (а также углы) остаются инвариантными при всех преобразованиях группы P. Принято считать, что различие между геометриями, определяемыми группами D и P, несущественно. В качестве примера отметим, что окружность C с центром O можно определить как множество всех таких точек A, для которых *расстояние* между точками O и A равно заданному числу r. При таком определении свойство фигуры быть окружностью выступает как объект геометрии группы D. Однако определение окружности можно сформулировать и иначе: для любых двух точек A_1, A_2 рассматриваемого множества C *отношение расстояний* $|OA_1| : |OA_2|$ равно единице. Эта формулировка определения показывает, что свойство фигуры быть окружностью является в действительности объектом геометрии группы P. Аналогично, равнобедренный треугольник можно определить как такой, у которого *длины* обеих боковых сторон равны заданному числу l, но можно определить и иначе: *отношение длин* боковых сторон равно единице. Таким образом, свойство фигуры быть равнобедренным треугольником относится не только к геометрии группы D, но и к геометрии группы P. Теорему Пифагора и другие теоремы элементарной геометрии также можно сформулировать в терминах величин углов и *отношений* длин, что и дает повод к утверждению о совпадении содержания геометрий групп D и P. Однако в действительности эти геометрии все же различны (см. примечание 122).

30. Например, соотношения (B_2) можно переписать в виде

$$\frac{X'}{Y'}=\frac{\cos\varphi+\frac{Y}{X}\sin\varphi}{-\sin\varphi+\frac{Y}{X}\cos\varphi},\quad \frac{X'}{N'}=\frac{X}{N}\cos\varphi+\frac{Y}{N}\sin\varphi,$$

$$\frac{Y'}{N'}=-\frac{X}{N}\sin\varphi+\frac{Y}{N}\cos\varphi,$$

т. е. попарные отношения величин X', Y', N' выражаются только через попарные отношения исходных величин X, Y, N.

31. То есть в зависимости от того, относится рассматриваемый инвариант к геометрии группы D или к геометрии группы P (см. примечание 29).

32. Для единообразия дальнейших формул определитель $M=\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}$ берется не в том виде, как он получается из рассматриваемой матрицы (вычеркиванием второго и четвертого столбцов), а с перестановкой оставшихся столбцов (т. е. с изменением знака). То же относится к $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{P}$.

33. Как и в случае геометрии на плоскости, это утверждение справедливо лишь при условии, что хотя бы один из определителей $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ отличен от нуля. Об исключительном случае $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}=\mathfrak{N}=0$ (получающемся, если точки *1*, *2*, *3* лежат на одной прямой) Клейн пишет ниже.

34. Клейн везде говорит о «минорах», но берет их со знаками $\pm$, т. е. рассматривает соответствующие алгебраические дополнения.

35. При дополнительном требовании, что хотя бы одно из чисел X, Y, Z отлично от нуля.

36. Выражая x_1, y_1, z_1 в силу первых трех формул (1) через x_2, y_2, z_2, X, Y, Z и подставляя эти значения в оставшиеся три формулы (1), получаем для L, M, N следующие выражения:

$$\begin{aligned} -Zy_2+Yz_2&=L,\\ Zx_2\qquad -Xz_2&=M,\\ -Yx_2+Xy_2\qquad &=N. \end{aligned}$$

Эти соотношения можно при заданных X, Y, Z, L, M, N рассматривать как систему уравнений относительно x_2, y_2, z_2. Матрица коэффициентов этой системы имеет нулевой определитель, а если дополнительно предположить, что хотя бы одно из чисел X, Y, Z отлично от нуля, то ранг этой матрицы равен 2. Следовательно, для разрешимости системы необходимо и достаточно, чтобы и расширенная матрица имела ранг 2, т. е. чтобы все определители третьего порядка были равны нулю. Например, вычеркивая столбец коэффициентов при x_2, получаем определитель

$$\begin{vmatrix} -Z & Y & L \\ 0 & -X & M \\ X & 0 & N \end{vmatrix}=X(XL+YM+ZN),$$

который равен нулю в силу условия (3). Аналогично, обращаются в нуль и все другие определители третьего порядка, т. е. система

совместна. Определив из этой системы какие-либо значения x_2, y_2, z_2, мы затем из первых трех соотношений (1) найдем x_1, y_1, z_1.

37. Точнее, $X = l\cos\alpha$, $Y = l\cos\beta$, $Z = l\cos\gamma$, где $l = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ — положительное число (длина рассматриваемого ненулевого вектора), а α, β, γ — углы, образованные этим вектором с положительными направлениями осей координат прямоугольной системы. Диагональ, о которой идет речь, имеет направление от начала координат к противоположной вершине параллелепипеда (с координатами X, Y, Z).

38. Поскольку прямые, вдоль которых действуют рассматриваемые силы, параллельны, но не совпадают, хотя бы одно из чисел $L_1 + L_2$, $M_1 + M_2$, $N_1 + N_2$ отлично от нуля. В самом деле, обращение всех этих трех чисел в нуль означало бы, что $L_2 = -L_1$, $M_2 = -M_1$, $N_2 = -N_1$, т. е. координаты рассматриваемых двух линейных элементов (изображающих силы) получаются друг из друга умножением на -1, т. е. пропорциональны, и потому эти линейные элементы определяют *одну и ту же* бесконечную прямую.

39. Даже включая в понятие силы бесконечно малую, бесконечно удаленную силу с конечными моментами вращения, т. е. то, что в элементарном изложении называют парой сил.

40. Дальнейшие вычисления проводятся при условии, что хотя бы одно из чисел Ξ, Η, Z отлично от нуля — об этом Клейн пишет в конце доказательства.

41. Если направленный отрезок $(1, 2)$ смещать по содержащей его прямой, то величины X, Y, Z, L, M, N изменяться не будут и потому не будет изменяться определенный выше момент одного линейного элемента по отношению к другому, т. е. не будет изменяться объем тетраэдра $(1, 2, 1', 2')$; то же справедливо и при смещении направленного отрезка $(1', 2)$ вдоль содержащей его прямой. Следовательно, мы можем считать точки $1'$ и 2 совпадающими с концами отрезка p. При таком расположении отрезков площадь треугольника $(2, 1', 2')$ равна pr', а высота тетраэдра, проведенная из вершины 1, равна $|r\sin\varphi|$, откуда и вытекает, что объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}rr'p\sin\varphi$, а момент равен $rr'p\sin\varphi$. В соответствии со сделанным на с. 13 соглашением о знаке объема тетраэдра угол φ должен считаться положительным или отрицательным в зависимости от того, видим ли мы из точки 1 направление обхода треугольника $(2, 1', 2')$ совершающимся против часовой стрелки или по часовой стрелке.

42. Это будет видно из дальнейшего исследования, в котором Клейн рассматривает лишь случай, когда динама имеет *общий вид* (т. е. не сводится к одной силе и не сводится к паре сил).

43. Согласно сказанному в предыдущем примечании имеем $Z \neq 0$, $N \neq 0$ (и потому число $k = N/Z$ определено и отлично от нуля).

44. Винтовым движением называется композиция поворота вокруг некоторой оси и параллельного переноса в направлении этой оси. Частным случаем винтового движения является поворот (если параллельный перенос представляет собой тождественное

отображение), а также параллельный перенос. Любое сохраняющее ориентацию движение трехмерного пространства («собственное движение» по терминологии Клейна) является винтовым движением — см. Болтянский В. Г. Элементарная геометрия. — М.: Просвещение, 1985.

45. На первый взгляд этот вывод может показаться парадоксальным, так как получается, что для получения *всех* нулевых осей достаточно построить в каждой точке пространства по *одной* из них, а между тем через каждую точку должно проходить бесконечно много нулевых осей. Но при указанном построении действительно через данную точку P пройдет бесконечно много прямых, но только построенных (кроме одной) не в P, а в других точках пространства.

46. См. примечание 44.

47. Здесь термин «зеркальное отражение» Клейн использует для обозначения движения с определителем — 1, т. е. движения не в «собственном смысле слова» (оставляющего неподвижным начало координат). Заметим, что, например, зеркальное отражение относительно плоскости xy можно представить в виде композиции двух движений: преобразования (A_3), т. е. симметрии относительно начала координат, и преобразования $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = z$, представляющего собой «собственное» движение (поворот на 180° вокруг оси z). Именно поэтому Клейн не причисляет симметрии относительно координатных плоскостей к числу «элементарных» движений, композициями которых можно получить любые изменения прямоугольной системы координат, а ограничивается преобразованием (A_3).

48. Это равносильно тому, чтобы транспонировать в левой части первый множитель (что не меняет определителя), а затем, как обычно, умножать строки первого определителя на столбцы второго.

49. Это вытекает из приводимых ниже соображений о знаках определителей.

50. При линейном преобразовании координат

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z, \quad y' = a_2x + b_2y + c_2z, \quad z' = a_3x + b_3y + c_3z$$

координаты X, Y, Z, L, M, N линейного элемента преобразуются следующим образом. Имеем

$$X' = x_1' - x_2' = \left(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1\right) - \left(a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2\right) = \\ = a_1X + b_1Y + c_1Z.$$

Аналогично преобразуются координаты Y, Z, т. е. мы получаем

$$X' = a_1X + b_1Y + c_1Z, \qquad Y' = a_2X + b_2Y + c_2Z, \\ Z = a_3X + b_2Y + c_3Z.$$

Далее,

$$L' = y_1'z_2' - y_2'z_1' = \left(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1\right)\left(a_3x_2 + b_3y_2 + c_3z_2\right) - \\ - (a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2)(a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1) = \\ = (b_2c_3 - b_3c_2)(y_1z_2 - y_2z_1) - (a_2c_3 - a_3c_2)(z_1x_2 - z_2x_1) + \\ + (a_2b_3 - a_3b_2)(x_1y_2 - x_2y_1) = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} L - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} M + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} N.$$

Аналогично преобразуются координаты M, N, т. е. мы получаем

$$L' = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} L - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} M + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} N$$

$$M' = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} L + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} M - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} N, \qquad (*)$$

$$N' = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} L - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} M + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} N.$$

Если теперь мы рассматриваем пару сил, т. е. осуществляем предельный переход, при котором X, Y, Z стремятся к нулю, а L, M, N имеют конечные пределы, хотя бы один из которых отличен от нуля («бесконечно удаленная бесконечно малая сила с конечными моментами вращения»), то и в новой системе координат мы получаем в пределе $X' = Y' = Z' = 0$, тогда как новые координаты L', M', N' выражаются через L, M, N по формулам (*). Это и дает формулы преобразования координат пары сил при переходе к новой системе координат.

Теперь остается подставить значения коэффициентов $a_1, \ldots$ $\ldots, c_3$ для каждого из преобразований (A_2), (A_3), (A_4) — это и дает формулы (C_2), (C_3), (C_4). При этом для получения формул (C_2) надо лишь использовать соотношение (7) (и аналогичные равенства для других коэффициентов, о которых Клейн пишет на с. 68).

51. Клейн имеет в виду поведение координаты вектора при зеркальном отражении системы координат относительно ее начала.

52. Аксиальные векторы называют также осевыми векторами или *псевдовекторами*.

53. Собственно говоря, «начало» имеет направленный отрезок, а не вектор. Смысл высказывания Клейна состоит в том, что мы *откладываем* векторы от одной точки A, т. е. находим такую точку B_1, что разности координат точек B_1 и A равны X_1, Y_1, Z_1 (и аналогично для второго вектора). Откладывая от той же точки A сумму рассматриваемых векторов, мы и получаем направленный отрезок, изображаемый диагональю параллелограмма. Следует при этом оговорить, что рассматриваемое описание («параллелограмма сил») применимо только в том случае, если векторы-слагаемые не коллинеарны, т. е. их координаты не пропорциональны.

54. Здесь и далее Клейн несколько чрезмерно жесток к механике и физике. Использование аналогии между действиями над числами и действиями над векторами характерно также и для математики. Так, широко используемые в математике и ее приложениях *векторные пространства* вводятся с помощью системы аксиом, явно использующей указанную аналогию. Название «скалярное произведение», о котором Клейн пишет ниже, широко применяется в ряде разделов математики (например, в линейной алгебре и функциональном анализе). К тому же название «произведение» для этой операции имеет столько же оснований, сколько и результат операции умножения, рассматриваемой в гиперкомплексных системах (см. т. 1, с. 89, где Клейн не высказывает в столь эмоциональной форме своего недовольства прижившейся терминологией). Однако, оставляя терминологические

соображения в стороне, следует отметить, что детальный анализ, проведенный Клейном на базе «грассманова принципа», глубоко вскрывает природу геометрических объектов, прежде затушевывавшуюся рассмотрением только одной фиксированной системы координат (или только «правых» систем координат).

55. В самом деле, совершенно так же, как в примечании 50, устанавливается, что при линейной однородной подстановке координат компоненты свободного плоскостного элемента преобразуются по формулам, аналогичным (*):

$$\mathfrak{L}' = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \mathfrak{L} - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \mathfrak{M} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathfrak{N}$$

и т. д. Отсюда получаем для любого свободного вектора X, Y, Z и любого свободного плоскостного элемента $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ соотношение

$$\mathfrak{L}'X' + \mathfrak{M}'Y' + \mathfrak{N}'Z' = \Delta(\mathfrak{L}X + \mathfrak{M}Y + \mathfrak{N}Z).$$

Следовательно, равенство $\mathfrak{L}X + \mathfrak{M}Y + \mathfrak{N}Z = 0$ сохраняется при любом аффинном (однородном) преобразовании. Однако в неортогональной системе координат это равенство уже не *означает* ортогональность *векторов* с компонентами $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и X, Y, Z. Отсюда вытекает, что свободный плоскостной элемент, удовлетворяющий условиям

$$\mathfrak{L}X_1 + \mathfrak{M}Y_1 + \mathfrak{N}Z_1 = 0, \quad \mathfrak{L}X_2 + \mathfrak{M}Y_2 + \mathfrak{N}Z_2 = 0$$

в исходной (прямоугольной) системе координат, т. е. такой, что вектор с компонентами $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ имеет направление векторного произведения векторов X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2, получает в другой (непрямоугольной) системе компоненты $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$, задающие вектор, вообще говоря, *не ортогональный* исходным векторам. Иначе говоря, совпадение компонент свободного плоскостного элемента и векторного произведения заданных свободных векторов, имевшее место в исходной прямоугольной системе, *разрушается* при переходе к непрямоугольной системе.

56. Наиболее общее понимание *линии* в современной математике относится к области *топологии* и связано с именем выдающегося советского математика П. С. Урысона (безвременно погибшего в возрасте 26 лет). Урысону принадлежит общее определение *размерности* топологического пространства (и, в частности, любого подмножества евклидова пространства). После этого линия естественно определяется как фигура, имеющая размерность 1. Например, *плоская* фигура (т. е. подмножество плоскости) является в урысоновском понимании линией, если, во-первых, она не содержит никакого круга (т. е. имеет размерность <2) и, во-вторых, она не является *несвязной* (т. е. имеет размерность >0). В трехмерном пространстве размерность фигуры определяется сложнее. См. интересную и прекрасно написанную книгу: Пархоменко А. С. Что такое линия. — М.: Гостехиздат, 1954.

Заметим, кстати, что подход, описанный Клейном в п. 3) и 4), приводит к двум различным обобщениям наивного понимания «линии». Одно понимание состоит в том, что параметрическая запись $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ рассматривается как способ описать *множество* всех точек, получающихся таким образом, т. е. как способ задания линии, понимаемой в смысле п. 5). Здесь значе-

ния параметра t в конце концов исключаются, т. е. не важно, при *каком* t получается та или иная точка, а важно лишь все множество получающихся точек. Второе понимание учитывает *последовательность* пробегания точек $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ при возрастании параметра t, скажем, от 0 до 1. Такое понимание определяет *путь* (это понятие, в частности, играет важную роль в алгебраической топологии). Таким образом, линия как множество точек или линия как путь — это *разные* трактовки понятия линии, которые Клейн не различает четко.

57. Можно сказать, что в таком понимании синтез означает последовательное «восхождение» от данных (при помощи отдельных «шажков мысли») к искомой цели, т. е., например, к получению требуемого доказательства или осуществлению построения. Напротив, анализ можно представлять как «попятное движение» от цели, т. е. решения задачи, к тем все более простым посылкам, из которых эта цель может быть достигнута, пока мы не заполним цепочку между искомым решением и имеющимися данными. При таком понимании анализ еще не дает решения задачи (если только мы в процессе анализа не убеждались каждый раз в *обратимости* очередного логического «шажка»), а лишь дает отыскание пути решения; по этому поводу см. Болтянский В. Г. Анализ — поиск решения задачи//Математика в школе. — 1974. — № 1. Иначе говоря, — и при решении задачи на построение это, как правило, всегда требуется — за анализом (первым этапом решения) должен следовать второй этап — осмысления, оформления найденного *пути* решения в виде четкого *решения* (например, описание окончательно найденного *построения*), а затем третий этап — *доказательство*, обоснование этого решения в виде *синтетического* рассуждения, ведущего от данных к искомому. В задачах на построение, на нахождение всех решений алгебраической задачи и т. п. имеется еще заключительный четвертый этап — *исследование*, говорящее о числе решений в зависимости от выбора параметров, характеризующих условие.

58. Здесь следует с удовлетворением отметить, что в современном преподавании математики в школе (как высшей, так и средней) векторы заняли в советской школе прочное место, — хотя и существуют различные точки зрения по вопросу о том, в достаточной ли степени пронизан курс математики применением векторных методов. Об истории введения векторных методов в преподавание математики можно прочитать в интересной статье: Глейзер Г. Д., Кени Г. К. К истории вопроса об изучении векторов//Математика в школе. — 1986. — № 5. — С. 54—57.

59. В программах и учебниках, действующих в советской школе, эта точка зрения Клейна находит свое отражение в том, что придается очень большое и серьезное значение вопросу об осуществлении *межпредметных связей* математики с другими предметами (физикой, химией, информатикой, географией и т. д.), а также вопросу о *внутрипредметных связях* в математике — между курсами геометрии, алгебры, начал математического анализа.

60. Это определение поляры не является общим (например, оно неприложимо, если точка p лежит во внутренней области, т. е. через нее не проходит ни одна действительная касательная к рассматриваемому коническому сечению). Общее определение получается либо переходом в комплексную область (из любой точки, не принадлежащей коническому сечению, можно провести

к нему две касательные, которые, однако, могут оказаться мнимыми, но и в этом случае прямая, соединяющая точки касания, будет действительной — это и есть поляра), либо с использованием гармонических четверок точек. Именно, если через точку p проводить всевозможные прямые, пересекающие коническое сечение в двух точках a, b, то множество всех таких точек q, что a, b, p, q — гармоническая четверка, представляет собой либо прямую, либо часть некоторой прямой. Эта прямая π и есть поляра точки p.

61. Теорема Паскаля (доказанная им в 1639 г.) утверждает, что если $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — шестиугольник, вписанный в коническое сечение, то *диагональные точки* M, N, P, получающиеся при пересечении прямых A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1, лежат на одной прямой. Двойственная ей теорема Брианшона (установленная им в 1806 г.) формулируется следующим образом. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 — шесть касательных конического сечения; тогда диагонали m, n, p получающегося описанного шестиугольника $B_{12}B_{23}B_{34}B_{45}B_{56}B_{61}$, т. е. прямые $B_{12}B_{45}$, $B_{23}B_{56}$, $B_{34}B_{61}$, пересекаются в одной точке. Доказательства этих теорем (а также изложение идей проективной геометрии и обоснование принципа двойственности) можно найти в книгах, указанных в примечании 7.

62. См. сноску **) на с. 89.

63. При условии, что рассматриваемая прямая не параллельна плоскости x, y.

64. Заметим, что Клейн ошибается, назвав автора анонимным: «Квадрат» — псевдоним математика Эдвина Э. Эббота, который и является автором книги. Русский перевод: Э б б о т Э. Э. Флатландия//Э б б о т Э. Э. Флатландия. Б ю р г е р Д. Сферландия. — М.: Мир, 1976.

65. Это слово «здесь» выделено для того, чтобы читатель не принял даваемую для данного случая характеристику математики за общую точку зрения Клейна.

66. Сказанное здесь относится только к *ортогональному* преобразованию координат, поскольку только в этой системе переход к обратной матрице (см. (2)) соответствует ее транспонированию. Как видно из соотношения (5) на с. 67 и получаемых из него дифференциальных следствий, коэффициенты в выражении компонент $\frac{\partial}{\partial x'}$, $\frac{\partial}{\partial y'}$, $\frac{\partial}{\partial z'}$ через $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ являются при линейном (аффинном) преобразовании координат элементами не самой матрицы перехода от x, y, z к x', y', z', а элементами *обратной* матрицы. В связи с этим природа вектора $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ отлична от вектора (dx, dy, dz); последний называют *контравариантным*, а первый — *ковариантным* вектором. Различие природы контравариантных и ковариантных векторов сказывается уже при изменении масштаба (о чем ниже пишет Клейн). Различие контравариантных и ковариантных компонент особенно существенно в тензорном исчислении и общей теории относительности. См. книгу Б. А. Дубровина, С. П. Новикова, А. Т. Фоменко, указанную в примечании 26.

67. Сейчас, как правило, изменение знака, о котором пишет Клейн, не применяется, т. е. градиентом называют вектор с ком-

понентами $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$; он указывает направление быстрейшего *возрастания* функции f.

68. Это замечание Клейна представляется очень важным для школьного преподавания математики. Речь идет о том, чтобы, исходя из общей теоретико-множественной точки зрения (рассматривающей изучаемые в анализе функции как частный случай общего понятия *отображения* одного множества в другое), трактовать преобразования плоскости или пространства как своеобразные «геометрические функции». Этот «мостик» между анализом и геометрией не только создает удобства в смысле общности теоретико-множественного математического языка, применяемого в этих и других областях элементарной математики («образ», «прообраз», «переходит в», «обратные преобразования или функции», «область определения» и т. д.), но и имеет принципиальное методологическое значение как важный элемент современной математической культуры. Понятия множества, отображения, отношения эквивалентности и связанной с ним классификации и др. играют сегодня важную роль в информатике, математической лингвистике, математической экономике, теоретической физике, биологии. То, что Клейн предвидел это уже в начале столетия, является проявлением его общей прогрессивной позиции «фузионизма», т. е. не разобщенного рассмотрения отдельных ветвей математики, а нахождения и подчеркивания (как в науке, так и в преподавании) взаимосвязей, взаимопроникновения и влияния различных областей на их взаимообусловленное развитие. Кстати (об этом Клейн кратко пишет в следующем абзаце), именно геометрия дает простые и наглядные примеры отображений более общего вида, чем функции, рассматриваемые в элементарном анализе (где всегда число переходит в число, или точка — в точку), а именно, отображений, переводящих элементы одного множества в элементы другого. Так, в предыдущей главе речь шла о принципе двойственности в проективной геометрии, первоначальный вариант которого представлял собой отображение, сопоставляющее каждой точке некоторую прямую (ее поляру относительно фиксированного конического сечения).

69. Следует подчеркнуть, что аналитическая трактовка фактов геометрии, систематически и изысканно преподносимая Клейном в его лекциях (и даже встречающиеся далее высказывания о превосходстве такого подхода перед «чисто синтетическим» пониманием геометрии), преследует строго определенную цель: дать *его слушателям или читателям* глубокое, четко проведенное исследование, вскрывающее аналитическую природу основных геометрических понятий, их взаимосвязь и поведение при геометрических преобразованиях, а также позволяющее далеко проследить клейновскую «эрлангенскую» точку зрения на геометрию как на теорию инвариантов определенных групп преобразований. По мысли Клейна *учитель* должен во всем этом хорошо разбираться. Это не следует понимать в том смысле, что в школе преподавание геометрии должно проводиться чисто аналитическим методом. Напротив, Клейн в ряде мест (и, в частности, в заключительной главе этой книги, — к сожалению, написанной очень кратко) подчеркивает необходимость генетического формирования геометрических понятий, развития интуиции, пространственных представ-

лений, навыков изображения фигур и геометрических построеиий. Иными словами, в первоначальном школьиом преподавании должно самое существениое место занять синтетическое развитие геометрических знаний, что, конечно, ие только ие исключает использования идей эрлаигенской программы, ио, напротив, в своем высшем развитии школьиое преподавание геометрии должно с самого иачала широко использовать идеи симметрии, геометрические преобразования, групповой подход.

70. Клейи использует термии *подобное преобразование* пространства. В *этом* издании книги мы придерживаемся следующей терминологии. Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование пространства, которое каждую точку A переводит в такую точку A', что $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$. Далее, композиция $f \circ h$ гомотетии h и любого движеиия f иазывается преобразованием подобия. Все преобразования подобия образуют *группу* преобразований пространства.

71. Это ие очень четко сформулироваииое утверждение можио уточнить следующим образом. Ограиичимся случаем, когда определитель Δ преобразования (1) отличен от нуля. В этом случае рассматриваемое преобразование взаимно однозначно отображает пространство на себя (причем и само преобразование и обратное ему являются иепрерывными, т. е. представляют собой *гомеоморфизмы*). Из этого следует, что если точка (x, y, z) произвольным образом уходит в бесконечность (т. е. $|x|+|y|+|z|$ неограниченно возрастает), то и точка (x', y', z'), получаемая преобразованием (1), уходит в бесконечиость (и обратно). При $\Delta = 0$ это не всегда так, т. е. точка (x, y, z) может таким образом уходить в бесконечность, что ее образ (x', y', z') будет оставаться в конечной части пространства (или даже будет оставаться неподвижным).

Однако, судя по тому, что говорится в следующем абзаце, Клейн, видимо, имеет в виду следующее более слабое утверждеиие (которое справедливо при любом значении определителя Δ и очевидным образом вытекает из формул (1)): если x, y, z иезависимо друг от друга стремятся к коиечным пределам, то x', y', z' также стремятся к конечным пределам. Иными словами, точка (x', y', z') ие может уйти в бесконечность, если точка (x, y, z) остается в ограниченной части пространства.

72. Легко видеть, что A', B', C' получаются из A, B, C линейным преобразованием с тем же определителем Δ. Так как хотя бы одио из чисел A, B, C отлично от нуля (поскольку $Ax + By + Cz + D = 0$ есть уравнение плоскости), то при $\Delta \neq 0$ также хотя бы одно из чисел A', B', C' отлично от нуля, и потому уравнение $A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0$ также определяет плоскость. Таким образом, в случае $\Delta \neq 0$ образом каждой плоскости при преобразовании (2) снова является иекоторая плоскость.

73. Интересно отметить, что здесь Клейи дает содержательно-геометрическую, а не координатную трактовку свободного вектора. Именно, если в главе I свободиый вектор определялся как геометрический образ, характеризуемый компоиеитами X, Y, Z (с. 49—50), то здесь неявио используется следующая геометрическая интерпретация: свободным вектором иазывается множество (бескоиечиое!) всех иаправлеииых отрезков с одиими и теми

же компонентами X, Y, Z, т. е. направленных отрезков, получающихся друг из друга параллельными переносами. Разумеется, эти определения вполне соответствуют друг другу. Вместе с тем существенно отметить, что даже при аналитическом изложении Клейн нацеливает слушателей на то, чтобы за каждым аналитическим определением геометрического образа уметь *видеть* его содержательно-геометрический смысл.

74. Клейн не всегда четко различает свободные векторы и направленные отрезки (например, говорит о двух векторах «на одной прямой»), полагая, что после сказанного в предыдущей части книги читатель легко придаст формулировкам точный смысл.

75. Для применения обычного правила умножения матриц (каждая строка первого множителя умножается на каждый столбец второго) нужно в выписываемом ниже равенстве транспонировать первую матрицу и переставить множители.

76. Здесь Клейн трактует формулы (1) (или (2)) не как задающие аффинное преобразование самого трехмерного пространства R, а как аффинное *отображение* одного пространства R (в котором введены координаты x, y, z) *в другое пространство* R' (с координатами x', y', z'). Этот же прием используется часто и в дальнейшем. В случае, если R' совпадает с пространством R, мы имеем отображение пространства R *в себя*; в этом случае чаще всего в R рассматривается *одна* координатная система, причем x, y, z трактуются как координаты точки-прообраза, а x', y', z' — как координаты ее образа при рассматриваемом аффинном отображении (1) пространства R в себя. Если это отображение взаимно однозначно (и потому имеет обратное аффинное отображение (4)), то оно называется аффинным преобразованием пространства R на себя.

77. Эта форма записи аффинных преобразований делает возможность простого и наглядного их представления. Ограничимся для простоты случаем плоскости и представим себе две декартовы системы координат, одна из которых прямоугольная, а другая косоугольная с разными длинами единичных отрезков по осям. Разобьем в каждом случае плоскость на параллелограммы, проводя через целочисленные точки каждой оси прямые, параллельные другой оси (в первой системе это будут квадраты, а во второй — параллелограммы общего вида). Если теперь в первой системе нарисовать некоторую фигуру M, а затем во второй системе перерисовать «по клеточкам» аналогичную фигуру M', то мы получим в результате «аффинно искаженную» копию M' фигуры M. (В книге Делоне и Райкова, указанной в примечании 2, в качестве M берется рисунок котенка, а M' будет вытянутым и перекошенным его изображением.) Переход от M к M' и дает представление об аффинном преобразовании плоскости, а возможность переноса рисунка «по клеточкам» как раз и обусловлена видом формул (6).

78. Для получения таким образом произвольного эллипсоида достаточно в качестве λ, μ, ν брать положительные числа.

79. Учитывая направленность этих лекций Клейна на школьное преподавание, целесообразно привести еще пару примеров, более близких к школьной тематике (и уместных, например, для применения в кружковой работе).

Пример 1. В трапеции середины оснований обозначены через M и N, далее, P — точка пересечения диагоналей, Q — точка пересечения продолженных боковых сторон. Доказать, что M, N, P, Q лежат на одной прямой.

Для доказательства осуществим аффинное преобразование f, переводящее онование AB и отрезок MN в два взаимно перпендикулярных отрезка. Тогда мы получим равнобочную трапецию, в которой указанные четыре точки лежат (в силу соображений симметрии) на одной прямой. Но тогда, переходя к исходной трапеции с помощью аффинного преобразования f^{-1}, мы находим, что и в ней эти четыре точки M, N, P, Q лежат на одной прямой.

Пример 2. Вокруг данного эллипса L описать треугольник наименьшей площади.

Для решения осуществим аффинное преобразование f, переводящее эллипс L в круг K. Если T — искомый наименьший треугольник, описанный вокруг L (т. е. отношение площадей фигур T и L минимально), то треугольник $S = f(T)$ обладает тем свойством, что отношение площадей (не меняющееся при аффинном преобразовании) фигур S и K минимально. Иначе говоря, S — треугольник минимальной площади, описанный вокруг круга K. Но тогда S — равносторонний треугольник, а искомый треугольник T получается из S обратным преобразованием f^{-1}. Так как существует однократно бесконечное (∞^1) семейство равносторонних треугольников, описанных около круга K, то, следовательно, существует однократно бесконечное семейство треугольников, описанных около данного эллипса и имеющих минимальную площадь. (Если задать точку касания одной из сторон описанного треугольника с эллипсом, то задача будет иметь единственное решение.)

Ряд других примеров имеется в книге: Яглом И. М. Геометрические преобразования. — Ч. 1: Движения и преобразования подобия. — М.: Гостехиздат, 1955. — Ч. 2: Линейные и круговые преобразования. — М.: Гостехиздат, 1956.

80. В дальнейшем E называется оригинальной, а E' — картинной плоскостью (или плоскостью изображений).

81. Говоря о косоугольной системе координат, Клейн здесь предполагает, что единицы масштаба для всех осей одинаковы (и совпадают с некоторой фиксированной единицей длины). Поэтому $x' = x$, а число μ однозначно определяется выбором оси y, плоскости E' и направления проектирования.

82. В самом деле, расположим плоскости E и E', как указано в тексте, т. е. так, чтобы точки M, A совпали соответственно с M', A', но точка B не лежала в плоскости E'. Далее, рассмотрим параллельное проектирование плоскости E на E' с помощью связки прямых, параллельных прямой BB'. Это проектирование осуществляет аффинное отображение плоскости E на E', переводящее точки M, A, B соответственно в M', A', B'. Исходное аффинное отображение плоскости E на E' также переводит M, A, B соответственно в M', A', B'. Но существует единственное аффинное отображение одной плоскости на другую, переводящее заданные три точки M, A, B (не лежащие на одной прямой) в M', A', B'. Следовательно, исходное аффинное отображение *совпадает* с построенным параллельным проектированием плоскости E на E'.

83. Более подробно: пусть E и E' — две плоскости в трехмерном евклидовом пространстве R и f — аффинное отображение плоскости E на E'; тогда существуют такое преобразование подобия g пространства R (т. е. композиция гомотетии и движения) и такое параллельное проектирование p пространства R на плоскость E', что композиция $p \circ g$, рассматриваемая на плоскости E, совпадает с f. Предыдущими рассмотрениями эта теорема полностью доказана.

84. Эта формулировка не очень четкая, а последующие несколько страниц, посвященные доказательству, не слишком проясняют дело. Клейн здесь слишком много внимания уделяет аналитике в ущерб четкости геометрических формулировок и пространственных представлений читателя. Дадим поэтому критический разбор содержащихся далее рассуждений.

Пусть p — параллельное проектирование трехмерного пространства R на плоскость $E' \subset R$, проходящую через начало O (разумеется, направление проектирования не параллельно плоскости E'). Далее, пусть h — гомотетия с центром O и положительным коэффициентом. Тогда композиция $h \circ p$ представляет собой, можно сказать, аффинное изображение пространства R на плоскости E' с изменением масштаба (Клейн в качестве примера приводит фотографическое изображение предмета с достаточно большого расстояния). Это отображение $h \circ p$ и будем называть *аксонометрией*. Заметим теперь, что после «фотографирования» картинная плоскость E' может быть перемещена в некоторое новое положение (фотографию можно перенести в другое место). Если мы обозначим через E^* новую картинную плоскость (в которую мы поместим нашу фотографию), то математически это можно сформулировать так: мы осуществляем некоторое *движение* f пространства R и образ плоскости E' при этом движении обозначаем через E^*. Задача заключается в исследовании (аналитическом и геометрическом) отображения $f \circ (h \circ p)$ пространства R на плоскость E^*, т. е. мы осуществляем фотографирование предмета с далекого расстояния (что практически совмещает в себе параллельное проектирование и изменение масштаба), а затем переносим фотографию в новое положение. (Возможно, Клейн называет «аксонометрией» каждое из отображений $h \circ p$ и $f \circ h \circ p$, но поскольку это вещи разные, мы будем для четкости называть аксонометрией только *первое* из них, а несколько неопределенный термин «аксонометрическое изображение», как бы характеризующий «фотографию», где бы она ни находилась, употреблять не будем.)

Теперь, условившись о терминологии, перейдем к точным формулировкам. Фактически речь идет о *трех* теоремах (первые две из которых Клейн не формулирует ясно).

Теорема 1. *Всякое отображение пространства R в себя, представляющееся в виде композиции $f \circ (h \circ p)$, записывается в декартовых координатах (например, прямоугольных) в виде (1), причем $\Delta = 0$, но не все миноры второго порядка обращаются в нуль.*

Теорема 2. *Обратно, всякое отображение пространства R в себя, имеющее вид (1), где $\Delta = 0$, но не все миноры второго порядка обращаются в нуль, представляется в виде композиции $f \circ (h \ \ p)$.*

Заметим, что обойтись в теореме 2 без движения f нельзя, т. е., вообще говоря, отображение (1) (где $\Delta = 0$, но не все миноры второго порядка обращаются в нуль) *не является* аксонометрией, т. е. не представляется в виде $h \circ p$. (Например, в таком виде не представляется отображение, описываемое формулами $x' = y$, $y' = z$, $z' = 0$.)

Наконец, третья теорема (Польке — Шварца) формулируется Клейном ниже и используется при доказательстве теоремы 2, сформулированной здесь. Клейн не формулирует раздельно и четко теоремы 1 и 2; при этом на доказательстве более простой теоремы 1 он вначале не останавливается вовсе (об этом он кратко говорит на с. 132), а все внимание фактически уделяет теореме 2. Если же учесть, что Клейн рассматривает иногда одно пространство R, а иногда два пространства R и R', обращая внимание на сами координаты, а не на изображаемые ими точки, то становится понятной причина трудности изложения.

Приведем прежде всего доказательство теоремы 1. Итак, пусть p — параллельное проектирование пространства R на плоскость E'. Если мы расположим оси координат косоугольной системы так, чтобы оси x, y были расположены в плоскости E', а ось z параллельна проектирующим прямым, то рассматриваемое параллельное проектирование p будет описываться формулами

$$x' = x + 0y + 0z, \quad y' = 0x + y + 0z, \quad z' = 0x + 0y + 0z, \ (*)$$

т. е. линейной подстановкой координат с определителем, равным нулю. Поэтому композиция $f \circ (h \circ p)$, в которой f и h — *невырожденные* линейные преобразования, также описывается в этой (а потому и в любой другой) декартовой системе линейной подстановкой координат с нулевым определителем. Далее, так как матрица отображения (*) имеет отличный от нуля минор второго порядка, то и матрица отображения $f \circ (h \circ p)$, записанного в любой декартовой системе координат, имеет хотя бы один отличный от нуля минор второго порядка. Этим и завершается доказательство теоремы 1.

Далее Клейн фактически приступает к доказательству сформулированной здесь теоремы 2. Прежде всего он устанавливает (с. 124—125), что при $\Delta = 0$ отображение (обозначим его через φ), определяемое в некоторой системе координат формулами (1), обладает тем свойством, что образы всех точек пространства лежат в одной плоскости (2), причем (поскольку не все миноры второго порядка обращаются в нуль) эта плоскость *однозначно* определена соотношениями (2'). Иначе говоря, образ пространства R при отображении φ представляет собой *плоскость* (а не прямую).

Не будем теперь обращать внимания на то, что Клейн переходит затем в *другое* пространство R', а будем продолжать вести рассуждения в том же пространстве R. Обозначим плоскость (2), т. е. *образ* пространства R при рассматриваемом отображении φ, через E^*. Далее, кроме исходной системы координат (в которой наше преобразование записывалось формулами (1)) — будем называть ее *старой* системой — введем еще одну, *новую систему* координат, у которой оси x', y' лежат в плоскости E^* (у Клейна новая система является *прямоугольной*: пер-

вые две оси составляют прямоугольную систему в плоскости E^*, а третья перпендикулярна этой плоскости). Тогда плоскость E^* определяется в новой системе уравнением $z' = 0$. Условимся теперь записывать точки-прообразы в *старой* системе, а их образы — в *новой*. Иначе говоря, если $a(x, y, z)$ — произвольная точка пространства R (координаты в *старой* системе), то ее образ $b = \varphi(a)$ записывается своими координатами в *новой* системе. В результате и получаются формулы (3). Таким образом, соотношения (3) представляют собой запись *того же самого* отображения φ, но такую запись, при которой прообраз a и образ $b = \varphi(a)$ записываются своими координатами в *разных* системах.

Теперь (в разделе 1) Клейн доказывает, что прообраз $\varphi^{-1}(b)$ любой точки $b \in E'$ представляет собой прямую, причем эти прямые (взятые для различных точек $b \in E'$) попарно параллельны. Далее перейдем к разделу 8. Здесь Клейн доказывает, что существует в пространстве такая картинная плоскость E' и на ней такая прямоугольная система координат x', y', что проектирование p пространства R на E' (параллельно указанным выше прямым), сопровождаемое гомотетией h с коэффициентом λ (т. е. отображение $h \circ p$), описывается *как раз* уравнениями (3), в которых x, y, z — координаты проектируемой точки, а x', y' — координаты ее образа (при отображении $h \circ p$) на плоскости E'.

Для доказательства теоремы 2 остается заметить, что если f — такое движение пространства R, которое плоскость E' с имеющейся на ней системой координат x, y переводит покоординатно в плоскость E^* с координатной системой x', y', то отображение $f \circ (h \circ p)$ совпадает с φ.

Остается заметить, что в разделах 2—6 Клейн дает геометрическое описание отображения φ, описываемого формулами (3), где по-прежнему x, y, z — координаты произвольной точки $a \in R$ в старой системе, а x', y', z' — координаты ее образа $b = \varphi(a)$ в новой системе (заметим, что плоскость, содержащую образы $\varphi(a)$ точек пространства R, мы в этом примечании обозначили через E^*, а Клейн обозначает ее через E'). Результатом этого описания является, в частности, то, что единичные векторы, направленные по осям координат старой системы x, y, z, переходят в тройку векторов (A), (B), (C) на плоскости E^*, среди которых найдутся два линейно независимых. А в разделе 7 Клейн формулирует третью теорему (теорему Польке — Шварца), справедливость которой теперь непосредственно вытекает из доказанной выше теоремы 2. В самом деле, если заданы векторы (A), (B), (C), то можно написать соотношения (3), и теперь рассуждения, проведенные в разделе 8, доказывают существование требуемой картинной плоскости E' с прямоугольной системой координат x', y' на ней.

85. Если все миноры второго порядка равны нулю, но хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля, то соотношения (1) (или (3)) задают отображение $h \circ q$, где q — проектирование пространства на некоторую *прямую* с помощью параллельных проектирующих плоскостей, а h — гомотетия.

86. Или путем разрывов на нижних (задних) ребрах, или же путем изображения этих нижних («невидимых») ребер штриховыми линиями.

87. Это фундаментальное предложение аксонометрии именуется теперь *теоремой Польке — Шварца.*

88. Среди которых, однако, имеются два линейно независимых.

89. Учитывая, что плоскость $Q'RS$ перпендикулярна прямой $\xi = \eta = 0$.

90. Строго говоря, в следующей строке Клейн в промежуточном вычислении находит *модуль* числа x', а в конце использует то, что x' и ξ имеют одинаковые знаки.

91. Переписав соотношение (c) в виде

$$\frac{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}{1 + \mathrm{ctg}^2\,\theta_1} = \frac{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}{1 + \mathrm{ctg}^2\,\theta_2},$$

а затем заменив $\mathrm{ctg}^2\,\theta_2$ с помощью соотношения (a), получаем для $\mathrm{ctg}\,\theta_1$ биквадратное уравнение, у которого свободный член и коэффициент при $\mathrm{ctg}^4\,\theta_1$ имеют (при $\cos\alpha \neq 0$) *противоположные* знаки. Поэтому для $\mathrm{ctg}^2\,\theta_1$ получаем два возможных значения, одно из которых отрицательно (и не дает действительных решений), а второе положительно. Это и показывает, что $\mathrm{ctg}\,\theta_1$ определен однозначно с точностью до знака. Аналогично (при $\cos\alpha \neq 0$) число $\mathrm{ctg}\,\theta_2$ определяется однозначно с точностью до знака. Если же $\cos\alpha = 0$, то, согласно (a), одно из чисел θ_1, θ_2 равно $\pi/2$, а для второго однозначно определяется из (c) значение синуса; отсюда вытекает, что и при $\cos\alpha = 0$ числа $\mathrm{ctg}\,\theta_1$, $\mathrm{ctg}\,\theta_2$ определены однозначно с точностью до знака.

92. Клейн, таким образом, неявно предполагает здесь, что хотя бы один из коэффициентов a_4, b_4, c_4 отличен от нуля (иначе нельзя говорить о «плоскости» $a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0$). Однако именно этот случай и представляет интерес, поскольку при $a_4 = b_4 = c_4 = 0$ формулы (1) задают *аффинное* преобразование, а этот случай был уже ранее подробно рассмотрен.

93. Где хотя бы одно из чисел ξ, η, ζ должно быть отличным от нуля (поскольку все четыре величины ξ, η, ζ, τ не могут одновременно обратиться в нуль).

94. Если l — какая-либо прямая, лежащая в плоскости E, а m — параллельная ей прямая, проходящая через точку O (и, следовательно, лежащая в плоскости $\tau = 0$), то произвольная точка M прямой m имеет координаты $\xi = \rho\xi^*$, $\eta = \rho\eta^*$, $\tau = 0$, где ξ^*, η^* — координаты вектора, лежащего в плоскости $\tau = 0$ и параллельного прямой m. Если теперь A_0 — фиксированная точка прямой l и ξ_0, η_0, $\tau = 1$ — ее координаты, то точка P, удовлетворяющая условию $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OM}$, принадлежит прямой l и имеет координаты $\xi = \xi_0 + \rho\xi^*$, $\eta = \eta_0 + \rho\eta^*$, $\tau = 1$. Следовательно, точка P имеет однородные координаты $\xi_0 + \rho\xi^*$, $\eta_0 + \rho\eta^*$, 1, или, что то же самое, однородные координаты $\xi^* + \frac{\xi_0}{\rho}$, $\eta^* + \frac{\eta_0}{\rho}$, $\frac{1}{\rho}$. Если теперь $\rho \to \pm\infty$, то точка M уходит в бесконечность по прямой m, а точка P уходит в бесконечность по прямой l. При этом однородные координаты точки P стремятся к значениям ξ^*, η^*, 0, а проектирующая прямая OP приближается к прямой m. Это и дает повод считать, что несобственная («бесконечно удаленная») точка прямой l

имеет однородные координаты ξ^*, η^*, 0, а m является той прямой связки O, которая соответствует этой несобственной точке. В результате осуществляется взаимно однозначное соответствие между точками (собственными или несобственными) плоскости E и прямыми связки O.

95. Здесь (и иногда далее) Клейн трактует формулы (2), (3) не как задающие проективное преобразование самого трехмерного пространства R, а как проективное *отображение* одного пространства R на другое пространство R' (в первом из которых введены однородные координаты ξ, η, ζ, τ, а во втором — ξ', η', ζ', τ'). См. примечание 76.

96. Существенно отметить, что речь идет о взаимно однозначном преобразовании *проективного* пространства. Если же речь идет о пространстве (или плоскости), не пополненном несобственными элементами (т. е. об *аффинном* пространстве), то любая коллинеация в нем представляет собой *аффинное* преобразование. Более того, если отображение сохраняет свойство *трех* точек лежать на одной прямой, то оно является коллинеацией (и, следовательно, аффинным преобразованием). Более подробно об этих вопросах можно прочитать во втором томе книги Б. Н. Делоне и Д. А. Райкова, указанной в примечании 2.

97. Справедливость этого утверждения здесь доказывать *не нужно*, так как оно вытекает из рассуждения, проводимого в разделе б) на с. 140—142.

98. Таким образом, у Клейна намечена лишь идея доказательства. Аккуратное доказательство имеется, например, в книге Б. Н. Делоне и Д. А. Райкова, указанной в примечании 2.

99. Это — частный случай общей точки зрения, провозглашенной Клейном в его эрлангенской программе. Именно, если задана некоторая группа преобразований (в данном случае — проективных) некоторого множества (в данном случае — проективного пространства), то она определяет некоторую геометрию (в данном случае — проективную геометрию), предмет которой составляет все, что сохраняется при этих преобразованиях.

100. Приведем еще некоторые примеры применения проективных преобразований, представляющие, например, интерес для школьной кружковой работы.

Теорема о полном четырехстороннике. *Пусть p_1, p_2, p_3, p_4 — четыре прямые в проективной плоскости, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34} — их точки пересечения и M, N, P — точки пересечения прямых $A_{12}A_{34}$, $A_{13}A_{24}$, $A_{14}A_{23}$. Тогда каждая из четверок (A_{14}, A_{23}; M, N), (A_{24}, A_{13}; M, P), (A_{34}, A_{12}; P, N) гармоническая.*

Для доказательства надо рассмотреть лишь первую четверку (две другие аналогичны). Далее, если $p_1 \parallel p_2$ и $p_3 \parallel p_4$ (т. е. в случае параллелограмма) одна из точек M, N является серединой отрезка $A_{14}A_{23}$, а другая бесконечно удаленная, откуда следует, что в этом случае четверка (A_{14}, A_{23}; M, N) гармоническая. Но тогда из проективных соображений (позволяющих перевести параллелограмм в любой четырехсторонник) эта четверка будет гармонической и в любом случае.

Предложение Паппа. *Если l и m — две различные прямые, A_1, A_3, A_5 — три точки на одной из них и A_2, A_4, A_6 — три точки на другой, то точки пересечения прямых A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 лежат на одной прямой.*

Это предложение является частным случаем *теоремы Паскаля* (получающимся, если коническое сечение вырождается в пару прямых). Это предложение было высказано Паппом в III веке н. э.

Теорема Дезарга. *Если треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены в плоскости так, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке S, то точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 расположены на одной прямой.*

Доказательство теоремы Дезарга и обратной ей теоремы наиболее просто проводнтся, если рассмотреть сначала пространственный случай (треугольннки не лежат в одной плоскости), а затем спроектировать получающуюся в этом случае конфнгурацию на плоскость.

Из теоремы о полном четырехстороннике непосредственно вытекает, что если в *аффинной* плоскости задан отрезок AB н указана его середина M, то через любую точку этой плоскости можно с помощью одной линейки провести прямую, параллельную AB. (Линейка предполагается *односторонней*.) Обратно, еслн начерчены две параллельные прямые в аффинной плоскости, то отрезок, расположеиный на одной из них, можно с помощью одной линейки разделить пополам. Из указаниых выше теорем можно получить и ряд других построений, выполняемых с помощью одной линейки. В прошлом веке Я. Штейнер доказал, что если в плоскости начерчена окружность и указан ее центр, то с помошью одной лииейки можно решить любую задачу на построеиие, разрешимую с помощью циркуля и линейкн (разумеется, эти построения *метрические*, а не проективные и даже не аффнннные).

Ряд других теорем и задач проективной геометрии можно найти в книгах, указаииых в примечании 7.

101. Что, впрочем, само собой ясно, поскольку из симметричности определения относительио точек p, p' непосредственно следует, что рассматриваемое преобразование (нниерсия) совпадает со своим обратным (подобно тому, как симметрия относительно прямой совпадает со своим обращеиием, вследствие чего инверсию нередко называют *симметрией относительно окружности*).

102. Лучше сказать, что знаменатель оказывается бесконечно малой более высокого порядка, чем, например, максимум модулей числнтелей, и потому хотя бы одна из координат x', y' z' становится бесконечно большой.

103. Плоскость, к которой указаииым образом присоединена одна бесконечно удаленная точка, иазывается плоскостью Мёбиуса, а также инверсной, или круговой плоскостью. Она является «субстратом», иа котором строится круговая геометрия, о которой Клейи пишет далее.

104. Клейн для простоты изложения опускает некоторые детали. Уравнение (5) можно переписать при $A \neq 0$ в виде (умножив иа $4A$)

$$4A^2\left(x'+\frac{B}{2A}\right)^2+4A^2\left(y'+\frac{C}{2A}\right)^2+4A^2\left(z'+\frac{D}{2A}\right)^2=$$
$$=B^2+C^2+D^2-4AE,$$

откуда видно, что оно определяет сферу (не вырождающуюся в точку) при условии $B^2+C^2+D^2-4AE>0$. При $A=0$ это условие принимает вид $B^2+C^2+D^2>0$, т. е. озиачает, что хотя

бы один из коэффициентов B, C, D отличен от нуля и, следовательно, уравнение (5) определяет плоскость (поскольку $A = 0$). Таким образом, уравнение (5) следует рассматривать лишь при выполнении дополнительного условия $B^2 + C^2 + D^2 - 4AE > 0$ на коэффициенты, и при этом условии оно выражает либо сферу (если $A \neq 0$), либо плоскость (если $A = 0$). В преобразованном уравнении роли коэффициентов A и E меняются, но условие $B^2 + C^2 + D^2 - 4AE > 0$ остается выполненным (ввиду его симметричности относительно A и E). Таким образом, если поверхность P представляет собой плоскость или сферу, то ее образ при инверсии также представляет собой плоскость или сферу.

105. Если A, B — концы штанг, имеющих длину l, то каждая из точек O, p, p' равноудалена от точек A и B, и потому точки O, p, p' лежат на одной прямой (на оси симметрии точек A и B). Далее, если Q — середина отрезка AB (т. е. центр ромба), то

$$Op \cdot Op' = (OQ - Qp)(OQ + Qp) = OQ^2 - Qp^2 = \\ = (l^2 - AQ^2) - (m^2 - AQ^2) = l^2 - m^2.$$

106. Достаточно доказать это для случая, когда рассматриваемые поверхности являются *плоскостями* (а именно, касательными плоскостями рассматриваемых поверхностей в их точке пересечения). В самом деле, так как преобразование выражается непрерывно дифференцируемыми (даже аналитическими) формулами, то касание поверхностей *сохраняется* при инверсии. Если же α и β — две *плоскости*, а Q_1, Q_2 — центры сфер α', β', являющихся их образами, то прямые OQ_1, OQ_2 являются ***нормалями*** плоскостей α и β, и потому угол между этими плоскостями равен $\angle Q_1OQ_2$. Но так как Q_1O, Q_2O являются радиусами сфер α', β', проведенными в точку O, то угол между касательными плоскостями сфер α', β' в точке O (а потому и в любой другой их общей точке) тоже равен $\angle Q_1OQ_2$.

Аналогичная теорема о сохранении углов справедлива и для *линий* (это может быть выведено из сохранения углов между поверхностями, если рассмотреть три плоскости, первая из которых касается обеих линий-оригиналов, а две другие ортогональны первой плоскости и каждая касается одной из линий).

107. В отличие от аффинных и проективных преобразований, при рассказе о которых Клейн останавливался на некоторых приложениях, инверсия обрисована здесь кратко и без упоминания приложений. В элементарной геометрии инверсия является, в частности, удобным аппаратом для решения определенного круга задач на построение. Речь идет прежде всего о задачах, в которых требуется построить окружность (или прямую), подчиненную условиям следующего типа: а) проходить через данные точки; б) пересекать данные прямые или окружности под данными углами (в частности, *касаться* данных прямых или окружностей). Типичным примером является следующая задача: построить окружность, проходящую через заданную точку O и касающуюся двух заданных окружностей α и β. Если произвести инверсию с центром O, то искомая окружность φ перейдет в некоторую *прямую* φ', а окружности α и β — в некоторые (известные нам) окружности α' и β'. Следовательно, задача сведется к построению прямой φ', касающейся двух заданных окружностей α' и β'. Решив эту стандартную задачу (имеющую до четырех решений),

мы затем из полученной прямой φ' получим с помощью той же инверсии искомую окружность φ (тоже до четырех решений).

О применениях инверсии можно прочитать в книгах Ж. Адамара (примечание 6), И. М. Яглома (примечание 79), В. Г. Болтянского (примечание 7). См. также книгу: Адлер А. Теория геометрических построений. — М.: Учпедгиз, 1940.

108. *Купец, торговец* выражается на латинском языке словом Merkator, а на немецком — Krämer.

109. Известный французский геометр (1824—1897); его трактат, в котором он рассматривает отображения одной поверхности на другую и составление географических карт, вышел в 1881 г.

110. В современной терминологии отображение (скажем, одной поверхности на другую, о чем говорит Клейн), которое является взаимно однозначным и взаимно непрерывным, называется *гомеоморфизмом*, а область математики, изучающая свойства фигур, сохраняющиеся при любых гомеоморфизмах, называется *топологией* (вместо архаичного термина «анализ положения»). Название это было предложено Листингом в его исторически первой работе, специально посвященной проблемам топологии (1847 г.).

111. См. указанную в примечании 25 книгу В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича, где можно также прочитать о дальнейшем развитии этих идей.

112. Подробное изложение вопросов, затрагиваемых здесь и далее Клейном, имеется в книге, указанной в предыдущем примечании.

113. В настоящее время известно, что это предложение (теорема Эйлера о многогранниках) было известно также Декарту, который владел и общим его доказательством. Эйлер впоследствии независимо сделал это открытие. В связи с этим сейчас нередко говорят о теореме Декарта — Эйлера и о характеристике Декарта — Эйлера (вместо ранее применявшегося термина «эйлерова характеристика»).

114. См. ниже общее уравнение (5).

115. О роли комплексных чисел в геометрии см. книги, указанные в примечаниях 2 и 26.

116. В частности, полезно заметить, что тригонометрические («круговые») функции $\eta = \sin\xi$, $\eta = \cos\xi$, $\eta = \operatorname{tg}\xi$ переходят при замене $\xi' = i\xi$ в гиперболические функции — $i\operatorname{sh}\xi'$, $\operatorname{ch}\xi'$, —$i\operatorname{th}\xi'$ (это непосредственно вытекает из формул Эйлера), причем геометрическая связь тригонометрических функций с окружностью позволяет проследить аналогичную геометрическую связь гиперболических функций с равносторонней гиперболой.

117. Иначе говоря, при $\xi = \xi'$, $\tau = \tau'$ последнее соотношение принимает вид $A\xi^2 + 2D\xi\tau + F\tau^2 = 0$, т. е. определяет точки пересечения рассматриваемой линии второго порядка с осью x.

118. Иначе говоря, если $\eta : \xi = k$ (т. е. взята бесконечно удаленная точка на прямой с угловым коэффициентом k), то из уравнения полярной системы $\xi\xi' + \eta\eta' = 0$ мы получаем $\eta' : \xi' = -\frac{\xi}{\eta} = -\frac{1}{k}$, т. е. соответствующая бесконечно удаленная точка лежит на перпендикулярной прямой.

119. Говоря о том, что точка P «мнимая», Клейн имеет в виду, что ее комплексные координаты ξ, η, ζ не могут быть до-

множением на отличный от нуля множитель ρ превращены в три *действительных* числа. Из этого, в частности, следует, что в выписанной ниже формуле (1) хотя бы одно из чисел ξ_1, η_1, ζ_1 отлично от нуля, и точно так же хотя бы одно из чисел ξ_2, η_2, ζ_2 отлично от нуля.

120. Остановимся на этом вопросе более подробно. Пусть выбрана единица измерения длин, — скажем, отрезок A_1A_2, у которого заданы координаты концов $A_1(a_1, b_1, c_1)$, $A_2(a_2, b_2, c_2)$. Тогда длиной произвольного отрезка P_1, P_2, соединяющего точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, называется число $|P_1P_2| = \frac{l}{e}$, где

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$
$$e = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}.$$

В частности, если $e = 1$, то $|P_1P_2| = l$, как и указано в тексте Клейна. Заметим теперь, что при параллельных переносах, поворотах и симметрии относительно начала величины l, e не изменяются. При гомотетии же с коэффициентом λ обе величины l, e умножаются на λ, однако отношение $\frac{l}{e}$ не изменяется и при этих преобразованиях. Иначе говоря, если определить длину формулой $|P_1P_2| = \frac{l}{e}$, то она будет инвариантной при всех преобразованиях отмеченного вида, т. е. будет инвариантной при всех преобразованиях *главной группы*, которую Клейн описывает ниже. Однако такой подход означает, что длина определяется не самим отрезком P_1P_2, а парой (P_1P_2, A_1A_2), причем при преобразовании надо каждый раз брать длину относительно *новой* единицы — той, в которую переходит отрезок A_1A_2 при этом преобразовании. Сама же величина l не остается инвариантной при всех преобразованиях главной группы, т. е., строго говоря, не является объектом той метрической геометрии, о которой говорит Клейн.

Если же рассмотреть только те преобразования, которые являются композициями параллельных переносов, поворотов и симметрий (т. е. преобразования, составляющие *группу движений D*, о которой речь будет идти в дальнейших примечаниях), то относительно этой группы обе величины l, e инвариантны. Следовательно, взяв с самого начала $e = 1$, т. е. определив длину формулой $|P_1P_2| = l$, мы получим величину, инвариантную относительно всех преобразований группы движений D, которая и принимается в этой геометрии за длину отрезка. Это показывает, что геометрия группы движений отличается от геометрии главной группы. О дальнейших различиях будет сказано ниже.

121. Здесь рассуждения Клейна скорее имеют наводящий характер, нежели точный математический смысл. В особенности это относится к сказанному в п. 6). В самом деле, когда в разделе 2) Клейн говорит о метрической геометрии, он имеет в виду, что рассматривается трехмерное арифметическое пространство R^3, точками которого являются всевозможные тройки (x, y, z) действительных чисел, и в этом пространстве рассматривается некоторое множество P преобразований, а именно, преобразований, которые представляются в виде композиций преобразований,

принадлежащих основным четырем типам. Этими основными четырьмя типами преобразований являются: 1) параллельные переносы; 2) повороты вокруг нулевой точки (т. е. такие преобразования, при которых координаты x', y', z' точки-образа получаются из координат x, y, z точки-прообраза линейной однородной подстановкой, коэффициенты которой образуют ортогональную матрицу с определителем $+1$); 3) симметрия относительно нулевой точки; 4) гомотетии с положительным коэффициентом и с центром в нулевой точке. Множеству P как раз и принадлежат все преобразования, представляющиеся в виде композиции преобразований этих четырех типов. Множество P представляет собой *группу преобразований* (о понятии группы Клейн пишет чуть ниже), которую условимся называть *группой подобий* пространства R^3; Клейн называет ее ниже «главной группой» и обозначает через $\mathfrak{G}_7$. Теперь все те свойства геометрических фигур (т. е. подмножеств пространства R^3), которые остаются инвариантными, не изменяются при всех преобразованиях, принадлежащих группе P, и составляют предмет изучения той геометрии, которую Клейн называет *метрической*.

Это построение укладывается в следующую общую схему. Имеется некоторое *основное множество* M, элементы которого именуются *точками*, и задана некоторая группа G преобразований множества M (каждое рассматриваемое преобразование является взаимно однозначным отображением множества M на себя; композиция преобразований и обратное преобразование имеют очевидный смысл). Теперь все те свойства геометрических фигур (т. е. подмножеств основного множества M), которые инвариантны при всех преобразованиях, принадлежащих группе G, составляют предмет изучения *геометрии, определяемой на множестве M группой G*. Это и есть в абстрактном виде та основная идея, которая была провозглашена Клейном в его знаменитой эрлангенской программе.

В случае метрической геометрии, рассматриваемой Клейном в п. 2), основным множеством M является пространство R^3, а группой преобразований этого основного множества является группа подобий P. Для рассмотренной в п. 3) *аффинной геометрии* основным множеством M является то же пространство R^3, но группа преобразований (обозначим ее через A) является более широкой, чем P. Преобразования, составляющие группу A (т. е. аффинные преобразования), являются композициями параллельных переносов и преобразований, описываемых *любыми* линейными подстановками с невырожденными матрицами. Таким образом, аффинная группа A *содержит* группу подобий P, и потому всякое свойство, инвариантное относительно всех преобразований группы A, сохраняется, в частности, при всех преобразованиях группы P, но, вообще говоря, не наоборот. Иначе говоря, всякая теорема аффинной геометрии сохраняется и в метрической геометрии, но многие метрические свойства перестают иметь смысл при переходе к аффинной геометрии, что и отмечает Клейн в п. 3).

Если же перейти к проективной геометрии, рассматриваемой Клейном в п. 4), то здесь прежде всего следует отметить, что *изменяется* основное множество M. В самом деле, дробно-линейные преобразования *не являются* взаимно однозначными на пространстве R^3. Для обеспечения взаимной однозначности проективных преобразований приходится в качестве основного множества

M брать уже не R^3, а трехмерное (действительное) проективное пространство, в котором точкой является уже не тройка (x, y, z), а четверка $\xi : \eta : \zeta : \tau$ действительных чисел, определенных с точностью до общего множителя.

«Геометрия обратных радиусов», о которой пишет Клейн в разделе 5), вновь требует для корректного ее построения изменения основного множества M. Требуемое здесь основное множество M может быть получено из R^3 добавлением *одной* «бесконечно удаленной» точки (оно гомеоморфно трехмерной сфере, но не гомеоморфно ни R^3, ни трехмерному проективному пространству).

Таким образом, геометрии, упоминаемые Клейном в разделах 3), 4), 5), определяются на *разных* основных множествах, и сравнение их между собой (и с метрической геометрией) может быть лишь условным. Например, из всех — равноправных между собой — плоскостей трехмерного проективного пространства нужно выделить одну и условиться считать ее «бесконечно удаленной»: лишь при этом условии можно будет сравнивать проективную геометрию с аффинной.

С этой общей точки зрения те соображеиия о топологии, которые высказываются Клейном в п. 6), вряд ли допускают четкое оформление в рамках идей эрлангенской программы. Может показаться естественным рассматривать всевозможные гомеоморфные отображения пространства R^3 на себя (они образуют группу) и попытаться определить топологические свойства фигур как такие, которые сохраняются при любых указанных преобразованиях. Однако этот подход дает в действительности не топологические, а так называемые *изотопические* свойства фигур. Например, неперекрученная лента (боковая поверхность цилиндра, высота которого меньше радиуса основания) и дважды перекрученная лента (ее можно получить, разрезав предыдущую ленту поперек, дважды перекрутив и снова склеив), как легко видеть, гомеоморфны, однако изотопными они не являются, т. е. никаким гомеоморфным отображением пространства R^3 на себя не удастся неперекрученную ленту перевести в дважды перекрученную. Это показывает, что при рассмотрении топологических свойств фигур приходиться отказаться от рассмотрения какого-либо «основного множества» и какой-либо его группы преобразований. Фигуры, топологическими свойствами которых мы интересуемся, должны рассматриваться сами по себе (а не как вложенные в какое-то единое «основное множество»), и это делает топологические свойства не укладывающимися в рамки клейновского группового подхода.

(Впрочем, если размерность фигуры существенно меньше размерности объемлющего его евклидова пространства, то понятие гомеоморфизма сливается с понятием изотопии; например, заузленная и незаузленная замкнутая линия в R^3, которые гомеоморфны между собой, являются *неизотопными* в R^3, однако в R^4 две замкнутые линии всегда *изотопны*, но эти соображения не уничтожают, а усложняют простое само по себе понятие гомеоморфизма.)

122. Рассмотрение «главной группы» (которая в примечании 121 названа группой подобий и обозначена через P) имеет одну тонкость, которую Клейн оставляет без внимания. Для того чтобы ее пояснить, введем еще в рассмотрение *группу движений*

D пространства R^3, состоящую из всех преобразований, представляющихся в виде композиции параллельных переносов, поворотов и симметрий. Группа D содержится в «главной группе» P, но отличается от нее тем, что не содержит гомотетий. Теперь, согласно идеям клейновской эрлангенской программы, можно рассматривать в R^3 геометрию группы движений D и геометрию группы подобий P (или главной группы, как ее называет Клейн). Иначе говоря, можно рассматривать все те свойства, которые остаются инвариантными при всех преобразованиях группы D (они составляют предмет геометрии группы движений), а можно рассматривать все те свойства, которые инвариантны при всех преобразованиях группы P (т. е. относятся к геометрии группы подобий). Обе эти геометрии очень близки, но между ними имеются и различия. Например, в геометрии подобий любые два отрезка конгруэнтны, т. е. существует в группе P преобразование, переводящее первый из любых двух заданных отрезков во второй. В связи с этим, как отмечалось в примечании 120, в геометрии группы подобий отсутствует понятие длины отрезка, т. е. выражение $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, составленное из координат двух заданных точек (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), не является инвариантом в геометрии группы подобий (оно меняется при гомотетиях). В геометрии же группы D выражение l инвариантно, и можно говорить о длине отрезка, о конгруэнтных и неконгруэнтных отрезках и т. д. Вместе с тем *отношение* длин двух отрезков имеет смысл не только в геометрии группы движений, но и в геометрии группы подобий (поскольку хотя длина l отрезка изменяется в результате преобразований подобия, но отношение длин двух отрезков сохраняется). Иначе говоря, если $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ — две точки, по координатам которых вычислено указанное выше выражение, и если A_1' и A_2' — две другие точки, по координатам которых вычислено аналогичным образом выражение l', то отношение l/l' инвариантно при всех преобразованиях группы P.

Тот факт, что в геометрии группы подобий (в геометрии главной группы по терминологии Клейна) можно говорить об «отношении длин» двух отрезков, приводит к мнению (достаточно распространенному) о том, что естественное осмысление евклидовой геометрии состоит именно в понимании ее как геометрии группы P (главной группы), а рассмотрение геометрии группы движений малосущественно и не соответствует истинному пониманию смысла евклидовой геометрии. Это мнение можно пояснить несколькими простыми примерами. В силу инвариантности отношения длин в геометрии группы подобий можно говорить о равнобедренном треугольнике (т. е. о треугольнике, в котором отношение длин боковых сторон равно 1). Теорема о том, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, полностью сохраняет свое значение в геометрии группы подобий. Сохраняет свое значение и теорема Пифагора (в форме $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$, где a/c и b/c — отношения длин катетов к длине гипотенузы). Сфера с центром O, проходящая через точку A, определяется в геометрии группы подобий как множество всех таких точек M, что отношение расстояний $|OM| : |OA|$ равно 1, и т. п. Из этих примеров становится понятным, что *метрическая геометрия* (по тер-

минологии Клейна), т. е. геометрия группы подобий P, охватывает все богатство теорем элементарной евклидовой геометрии. Именно поэтому Клейн придает этой геометрии главенствующее значение, а группу P называет «главной группой». Рассмотрение же геометрии, определяемой группой движений D, может показаться излишним и не дающим ничего нового.

Однако такая точка зрения неправильна. В действительности геометрия группы движений *богаче*, чем геометрия группы подобий. Имеются содержательные теоремы, которые имеют место в геометрии группы движений, но разрушаются, перестают быть справедливыми при переходе от D к большей группе P (подобно тому, как существуют содержательные теоремы метрической геометрии, разрушающиеся при переходе от группы P к большей группе A — группе всех аффинных преобразований). Чтобы привести пример теоремы, отличающей геометрию группы движений от геометрии группы подобий, ограничимся для простоты рассмотрением геометрии на плоскости. Условимся называть плоскую связную фигуру *линией*, если она не содержит никакого круга (мы ограничимся рассмотрением *связных* линий, т. е. как бы состоящих из одного куска — это понятие, относящееся к области топологии, мы здесь не уточняем). Связную линию l будем называть *транзитивной*, если для любых двух точек A, B этой линии найдется преобразование f (принадлежащее группе преобразований, определяющей рассматриваемую геометрию), которое переводит линию l в себя, а точку A — в точку B. Транзитивная линия может как бы «скользить по себе» в рамках рассматриваемой геометрии. В евклидовой геометрии существуют только два типа связных линий на плоскости, которые могут «скользить по себе»: это прямые и окружности. И это может быть строго оформлено в виде теоремы, которая справедлива в геометрии группы движений: *плоская связная линия в том и только в том случае является транзитивной, если она представляет собой прямую или окружность*. Однако эта теорема *разрушается, перестает быть справедливой*, если мы перейдем к клейновской метрической геометрии, т. е. к геометрии группы подобий P. В геометрии группы подобий существуют связные плоские линии, *отличные* от прямых и окружностей, которые могут в рамках этой геометрии «скользить по себе», т. е. являются транзитивными. Такими линиями в геометрии группы подобий являются *логарифмические спирали*, определяемые в полярных координатах (на плоскости) уравнением $r = r_0 e^{k\varphi}$. В самом деле, композиция поворота на угол φ_0 (т. е. $\varphi' = \varphi + \varphi_0$, $r' = r$) и гомотетии с центром в нулевой точке и коэффициентом $e^{k\varphi_0}$ (т. е. $\varphi' = \varphi$, $r' = r \cdot e^{k\varphi_0}$), являющаяся преобразованием, *принадлежащим* группе подобий P, переводит, как легко видеть, рассматриваемую логарифмическую спираль в себя. Таким образом, естественное с точки зрения евклидовой геометрии представление о том, что связными плоскими линиями, которые могут скользить по себе, являются лишь прямые и окружности, имеет силу в геометрии группы движений, но не в геометрии группы подобий. Клейновская метрическая геометрия в этом вопросе отходит от привычных представлений евклидовой геометрии.

Таким образом, то, что Клейн совсем не уделяет внимания геометрии группы движений, а ограничивает «метрическую

геометрию» рамками геометрии группы подобий, не во всем соответствует «элементарно-геометрическим» представлениям.

123. В примечании 121 была отмечена недостаточность такого подхода в отношении топологии. В современных представлениях речь идет не о группе всех гомеоморфных отображений *некоторого* пространства M на себя, а о *категории* в с е х топологических пространств и их непрерывных отображений. Наиболее существенные топологические свойства описываются *функторами*; например, важнейшее значение имеют гомологические функторы (см. С т и н р о д Н., Э й л е н б е р г С. Э. Основания алгебраической топологии. — М.: Физматгиз, 1958).

124. Клейн здесь слишком категоричен. Речь идет, конечно, не о всех возможных геометриях, а о геометриях, определяемых группами преобразований. В этот класс геометрий не входят общая риманова геометрия, финслерова геометрия и другие понимания пространства, играющие важнейшую роль в современной математике и физике.

125. В примечании 121 эта клейновская идея выражена несколько более абстрактным и общим образом. Тот факт, что Клейн здесь рассматривает только такие группы преобразований, которые содержат «главную группу», несколько сужает общность рассмотрения геометрий, определяемых группами преобразований (но зато приближает рассматриваемые геометрии к евклидовой). Следует, однако, иметь в виду, что аффинная группа не включается в проективную *однозначным и естественным образом*, а получаемое вложение зависит от того, какую плоскость трехмерного проективного пространства условиться считать бесконечно удаленной. Тем не менее, несмотря на условность, это вложение позволяет проследить некоторые связи между аффинной и проективной геометриями.

126. В настоящее время указываемый Клейном принцип прослежен в своей максимальной общности и применимости и играет важную роль в геометрии и физике. О роли геометрических преобразований в построении различных геометрий и их роли в физике можно прочитать в книгах: Я г л о м И. М. Геометрические преобразования. — Ч. 1: Движения и преобразования подобия.— М.: Гостехиздат, 1955. — Ч. 2: Линейные и круговые преобразования. — М.: Гостехиздат, 1956; Я г л о м И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. — М.: Наука, 1969; более глубокое рассмотрение этого вопроса имеется, например, в книге Б. А. Дубровина, С. П. Новикова и А. Т. Фоменко, указанной в примечании 26. См. также В и з г и н В. П. Эрлангенская программа и физика. — М.: Наука, 1975.

127. В самом деле, если S — сфера с центром в точке пересечения перпендикулярных друг другу прямой l и плоскости α, то окружность $K = S \cap \alpha$ обладает тем свойством, что прямые, параллельные l и проходящие через точки окружности K, являются касательными к сфере S. Отсюда следует, что точка P_∞, в которой пересекаются все эти касательные, является полюсом плоскости α относительно сферы S. Пересекая все эти множества бесконечно удаленной плоскостью π_∞, получаем, что P_∞ есть полюс прямой $g_\infty = \pi_\infty \cap \alpha$ относительно конического сечения $\pi_\infty \cap S$, т. е. относительно окружности сфер.

128. Подробности имеются, например, в книге: Г у р е в и ч Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. — М.:

Гостехиздат 1948. См. также Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. — М.; Л.: ОНТИ, 1937; Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. — Т. 2. — М.: ИЛ, 1963.

129 Основная терминология теории инвариантов (инвариант, ковариант, дискриминант и др.) была введена Сильвестром.

130. Надо рассмотреть определитель четвертого порядка, в первой и третьей строках которого стоят ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, а во второй и четвертой τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, а затем разложить этот определитель (очевидно, равный нулю) в сумму произведений соответствующих миноров второго порядка из первой и последней пары строк. Аналогичный прием был применен Клейном на с. 51.

131. Если к уравнениям окружности сфер

$$\tau = 0, \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$

присоединить уравнение плоскости

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta\tau = 0 \qquad (*)$$

и решать полученную систему соотношений относительно однородных координат ξ, η, ζ, τ (т. е. искать *точки пересечения* окружности сфер с указанной плоскостью), то после исключения неизвестных мы получим одно квадратное уравнение, дискриминант которого отличается лишь множителем от $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. Таким образом, равенство $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ является условием того, что плоскость (*) имеет с окружностью сфер две *совпадающие* точки пересечения, т. е. касается ее.

132. Иначе говоря, речь идет о формулах аффинной геометрии, получающейся, если за бесконечно удаленную принять не плоскость $\tau = 0$, а другую плоскость $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta\tau = 0$.

133. Компоненты этого антисимметрического тензора имеют вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ b & a & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (*)$$

Коэффициенты 1, стоящие на главной диагонали, характеризуют отдельный вектор, который Клейн здесь добавляет, чтобы получающиеся формулы описывали бесконечно малый поворот. Таким образом, соотношения (8) можно записать в виде

$$\xi^\alpha = x^\alpha + A^\alpha_\beta x^\beta; \ \ \alpha, \beta = 1, 2, 3 \text{ (суммирование по } \beta),$$

где под ξ^1, ξ^2, ξ^3 понимаются ξ, η, ζ, под x^1, x^2, x^3 — величины x, y, z, а A^α_β — компоненты антисимметрического тензора (*). Вообще, в силу определения антисимметрического тензора его диагональные компоненты равны нулю.

134. См. в связи с этим примечание 122.

135. Здесь следует говорить не о проективной, а об *аффинной* геометрии, поскольку выше Клейн допустил существование двух прямых на плоскости, не имеющих общих точек, а также двух непересекающихся плоскостей; кроме того, аксиомы понятия «между» также относятся к аффинной, а не к проективной геометрии. Видимо, Клейн говорит о проективной геометрии, имея в виду последующее присоединение несобственных точек

136. Здесь Клейн впервые говорит не только о той метрической геометрии, которая определяется главной группой, но также о геометрии конгруэнтности, определяемой группой движений. В примечании 122 уже отмечалось, что эти геометрии отличаются друг от друга, например, отсутствием (во второй из них) плоских связных транзитивных линий, отличных от прямых и окружностей. Клейн отмечает здесь еще одно отличие: замкнутость (лучше сказать *ограниченность*) любой траектории любого движения, имеющего неподвижную точку (траекторией точки a относительно движения f называется минимальное множество, содержащее точку a и переходящее в себя при каждом из движений f, f^{-1}). Впрочем, наиболее простым отличием является наличие двух неконгруэнтных отрезков. Пожалуй, с наглядно-геометрической точки зрения наиболее убедительным отличием является теорема о транзитивных линиях, упомянутая в примечании 122.

137. Таким образом, Клейн фактически причисляет к первоначальным, неопределяемым понятиям, кроме точек и прямых, еще и движения; к аксиомам, описывающим свойства движений, относятся требования о том, что каждое движение представляет собой взаимно однозначное (биективное) отображение плоскости на себя; о том, что движение переводит прямые снова в прямые; о том, что справедлива сформулированная Клейном *аксиома подвижности* плоскости (рис. 104). Эта аксиома подвижности и является детализацией того, что существует ∞^3 движений: при фиксированных A и a выбор точки A' обладает двумя «степенями свободы» или содержит ∞^2 возможностей (так как положение A' определяется двумя координатами), а выбор луча a' обладает еще одной степенью свободы, т. е. содержит ∞^1 возможностей (значений угла от 0 до 2π). Заметим, что данная Клейном формулировка аксиомы подвижности означает, что рассматриваются лишь движения, *сохраняющие ориентацию* (иначе существовали бы ровно *два* движения, переводящих A, a соответственно в A', a', одно из которых сохраняет, а другое меняет ориентацию). Иначе говоря, если фигура F не обладает ни одной осью симметрии, а F' — фигура, симметричная F относительно некоторой оси, то F и F' *не считаются* конгруэнтными в рассматриваемой Клейном модели евклидовой планиметрии.

138. Это не есть новая аксиома о движениях, а лишь частный случай аксиомы подвижности: точка A переходит в A', а луч a с началом A, содержащий точку A', переходит в тот луч a' с началом A', который расположен на прямой AA' и не содержит точку A (заметим, что определение луча и теорема о разбиении прямой на два луча с началом в данной точке A регламентируются аксиомами расположения).

139. Эти свойства параллельных переносов представляют собой новые аксиомы. Заметим, что в геометрии Лобачевского эти свойства параллельных переносов не выполняются (хотя аксиомы соединения, аксиомы расположения и *ранее* сформулированные свойства движений, включая аксиому подвижности, имеют место).

140. Это — одна из форм *аксиомы Архимеда*, или *аксиомы измерения* (уточнение наглядного выражения «достичь либо перешагнуть» осуществляется очевидным образом).

141. Это представление о «непрерывном» осуществлении параллельного переноса может быть математически строго уточнено, но пока это можно рассматривать лишь как наглядное по-

яснение, а траекторией параллельного переноса считать просто прямую, соединяющую точку A и ее образ A'.

142. Разговор о траектории как о результате «непрерывного» выполнения параллельного переноса, возможно, удобен в целях наглядности, но в отношении строгости может только запутать рассуждения и сделать их неубедительными. Четкое доказательство можно провести, например, так. Пусть l_1 и l_2 — две траектории (т. е. l_1 — прямая, проходящая через некоторую точку B и ее образ B', и аналогично для l_2). Если l_1 и l_2 имеют общую точку A, то (поскольку, согласно одной из аксиом Клейна, каждая траектория переходит в себя) точка A должна, во-первых, переходить в точку A_1, принадлежащую траектории l_1, и, во-вторых (поскольку $A \in l_2$), точка A должна переходить в некоторую точку A_2, принадлежащую прямой l_2. Но поскольку образ точки A определен однозначно, мы имеем $A_1 = A_2$, т. е. l_1 и l_2 имеют, кроме A, еще одну общую точку $A_1 = A_2$. Следовательно, прямые l_1 и l_2 совпадают. Итак, две траектории либо не имеют общих точек, либо (если они имеют хотя бы одну общую точку) непременно совпадают.

143. Клейн обозначает композицию преобразований точкой; здесь использовано современное обозначение (кружок).

144. Согласно сформулированной выше аксиоме Архимеда.

145. Обыкновенно эту аксиому называют *аксиомой Паша*, который ввел ее в своих «Лекциях по новой геометрии» 1882 г. В данном случае эта аксиома применяется к треугольнику $O12'$ и к прямой, являющейся траекторией параллельного переноса S', проходящей через точку $1'$ (эта траектория не может пересечь прямую $1\,2'$, так как две траектории одного параллельного переноса не пересекаются, и, следовательно, она должна пересечь отрезок $O1$ оси x).

146. Здесь и далее изложение Клейна несколько схематично. Однако он и не преследует цель дать скрупулезный вывод всех теорем геометрии из вводимых аксиом, а имеет в виду лишь обрисовать общую схему обоснования геометрии с использованием групп преобразований.

147. Точнее, одной из аксиом, описывающих свойства движений (см. примечание 137).

148. Следующие далее соображения не так просто реализовать в виде четко проведенных рассуждений аксиоматического характера. Поэтому сказанное следует рассматривать лишь как очерк дальнейшего аналитического построения геометрии.

149. Клейн записывает преобразования *слева направо* в той последовательности, в которой они выполняются. Однако мы в этом издании книги следуем принятой теперь традиции, используя обозначение композиции (кружок) и записывая преобразования справа налево. Например, для любой точки A имеем

$$\Omega_1(A) = (T \circ \Omega \circ T^{-1})(A) = T(\Omega(T^{-1}(A))).$$

150. Высказанные соображения о переходе одних осей в другие означают, в частности, что точка A (1, 0) переходит в A' (0, 1), а точка B (0, 1) переходит в B' (—1, 0); отсюда однозначно определяются коэффициенты преобразования (1). Напомним, что x, y — координаты произвольной точки, а x', y' — координаты ее образа в *одной и той же системе координат*.

151. Иными словами, функции $\sin x$ и $\cos x$ *определяются* с помощью их рядов Тейлора:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

(или, что то же самое, определяются как решения дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ для функции $y = \sin x$ и $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ для функции $y = \cos x$). Число π определяется теперь как наименьший положительный корень уравнения $\sin x = 0$ (или уравнения $e^{ix} = -1$). Геометрический смысл функций $\sin x$ и $\cos x$ выяснится *после* того, как будут найдены аналитические формулы поворота (см. ниже соотношения (5)).

152. Сейчас эту шкалу принято называть радианной.

153. Из соотношений $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ (которые получаются, например, почленным дифференцированием рядов для $\sin x$ и $\cos x$) мы находим непосредственно, что $\frac{d}{dx}(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$, т. е. $\sin^2 x + \cos^2 x = \text{const}$. Остается заметить, что $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, и потому стоящая в правой части константа равна единице, т. е. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ для любого x.

154. Если иметь в виду острый (или прямой) угол между двумя прямыми, то следует правые части взять по модулю.

155. Более подробно о понятии площади в элементарной геометрии (и о тех аксиомах и принципах, на которых оно основывается) можно прочитать в указанной в примечании 10 статье В. А. Рохлина, а также в книгах: Болтянский В. Г. Элементарная геометрия. — М.: Просвещение, 1985; Болтянский В. Г. Третья проблема Гильберта. — М.: Наука, 1977.

156. Этот способ вывода площади параллелограмма имеет дефект: для высокого узкого параллелограмма высота падает не на основание, а вне его, так что «отрезать» треугольник от параллелограмма не удается. Однако *дополнение* и параллелограмма, и прямоугольника одинаковыми треугольниками позволяет получить одну и ту же трапецию (рис. 118), что и дает не имеющий дефектов вывод формулы площади параллелограмма.

157. В которой правую часть следует взять по модулю (или же говорить об *ориентированной* площади, о чем Клейн пишет в начале этого тома).

158. Клейн здесь очень краток. Подробнее о понятии длины кривой (и, в частности, о его аксиоматическом построении) можно прочитать в книгах, указанных в примечании 10, и в статье: Болтянский В. Г. Длина кривой и площадь поверхности// Энциклопедия элементарной математики. — Книга V: Геометрия. — М.: Наука, 1966. — С. 88—144.

159. В предыдущем изложении Клейн считал «движениями» только те преобразования, которые сохраняют расстояния и сохраняют *ориентацию*. В соответствии с этим он считал *конгруэнтными* только фигуры, которые переводятся одна в другую именно таким движением (сохраняющим ориентацию). Здесь же он называет конгруэнтными фигуры, которые переводятся одна в другую преобразованием, лишь сохраняющим расстояния (т. е.

не делает различия между конгруэнтными в прежнем смысле и симметричными фигурами).

160. И обладает тем свойством, что точка C' попадает в положение, расположенное по ту же сторону прямой AB, что и точка C. Из этого ясно, что к числу движений здесь следует причислять зеркальные симметрии.

161. *Пятый постулат* Евклида не совпадает дословно с указанной выше аксиомой параллельности, но представляет собой предложение, *эквивалентное* ей. Об этом евклидовом постулате Клейн говорит на с. 302 (см. рис. 126 и относящийся к нему текст).

162. То есть не имеющими границы, края. Иначе говоря, речь идет о *замкнутом* (не имеющем краев) двумерном многообразии. Какую бы точку A на таком многообразии мы ни взяли, у нее существует окрестность, гомеоморфная кругу, *внутри* которого находится точка A. Поэтому из точки A можно смещаться по этому многообразию в любую сторону.

163. Смысл этой фразы Клейна лучше всего пояснить при помощи *функции Лобачевского*. Пусть в плоскости Лобачевского из точки O, находящейся на расстоянии h от прямой g, проведены два луча OM_1, OM_2, параллельные g (т. е. те предельные положения луча OP, которые получаются, когда точка P удаляется по прямой g в ту или другую сторону в бесконечность; см. рис. 122 на с. 269. Далее, пусть ON — перпендикуляр к прямой g. Угол M_1ON (или M_2ON) в геометрии Лобачевского (или «НГ I», как ее именует Клейн) является острым; величина этого угла называется функцией Лобачевского и обозначается через $\Pi(h)$. Как доказал Лобачевский, она выражается формулой

$$\Pi(h) = 2 \operatorname{arctg} e^{-h/R},$$

где R — некоторая положительная постоянная (это и есть та произвольная постоянная, которую содержит «неевклидова геометрия первого рода»; Клейн вводит аналогичную постоянную на с. 276—278 из несколько иных соображений). Следовательно, тот угол между двумя параллельными OM_1, OM_2, который не содержит прямой g, равен $\varphi = \pi - 4 \operatorname{arctg} e^{-h/R}$. Из этой формулы видно, что при $h \to 0$ имеем $\varphi \to 0$.

Теперь ясно, что если параметр R (характеризующий единицы измерения длин) будет в сравнении с «расстоянием до Сириуса», о котором пишет Клейн, очень велик, т. е. с точки зрения доступных нам измерений величина h/R ничтожно мала, то угол между двумя параллельными к прямой g будет (если точка O находится в пределах области наблюдаемости) ничтожно мал, и потому отличие геометрии Лобачевского от евклидовой будет в этой области неощутимым и, как пишет Клейн, только по мере удаления точки O от прямой g угол φ будет приобретать все более заметную величину (и, более того, $\varphi \to \pi$ при $h \to \infty$).

164. См. Клейн Ф. Высшая геометрия. — М.: Гостехиздат, 1939.

165. Клейн кратко упоминает о том, что геометрия Лобачевского (НГ I) или Римана (НГ II) может быть включена в групповую схему, намеченную его эрлангенской программой. Поясним более подробно на примере геометрии Лобачевского, как это осуществляется (для случая геометрии Римана это делается

аналогично с заменой действительного конического сечения мнимым). Обозначим через K действительное коническое сечение (рис. 124 на с. 281), трактуемое как множество всех бесконечно удаленных элементов в той модели геометрии Лобачевского, которую рассматривает Клейн (ее называют *моделью Кэли—Клейна*). Всякое движение плоскости Лобачевского должно, во-первых, переводить внутреннюю область этого конического сечения («область операций гиперболической геометрии») в себя и, во-вторых, переводить прямые (точнее, хорды этих прямых, высекаемые линией K) снова в прямые. Отсюда становится понятным, что в этой модели движения плоскости Лобачевского изображаются *проективными преобразованиями, переводящими коническое сечение K в себя.* Следовательно, если рассмотреть множество G всех таких преобразований (оно представляет собой группу) и, следуя Клейну, рассмотреть геометрию, определяемую (на множестве M, представляющем собой внутреннюю область линии K) этой группой, то можно ожидать, что мы как раз получим таким образом гиперболическую геометрию (на плоскости). Это в самом деле подтверждается; сказанное позволяет построить модель Кэли — Клейна гиперболической геометрии *в рамках проективной геометрии.* Ведь G есть некоторая подгруппа всей проективной группы, и это еще раз подтверждает принцип Кэли о том, что «проективная геометрия — это вся геометрия».

166. Например, в геометрии Лобачевского *можно* определить параллельный перенос (или, лучше сказать, *сдвиг* вдоль прямой): это есть *движение*, которое «смещает» некоторую прямую l по себе, переводя одну точку A прямой l в другую ее точку. Однако траекториями, переходящими в себя при всевозможных сдвигах вдоль прямой l, будут не прямые, а *эквидистанты*, каждая из которых представляет собой множество всех точек, находящихся по одну сторону от прямой l на одном и том же расстоянии от нее.

167. Клейн не упоминает еще об одном важном применении геометрии Лобачевского — в специальной теории относительности (которое было предложено Германом Минковским уже после прочтения Клейном этого курса лекций). Рассматривается четырехмерное *псевдоевклидово пространство*, в котором расстояние от точки (x_0, x_1, x_2, x_3) до начала координат определяются формулой

$$s=\sqrt{x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$

(аналогично определяется расстояние между двумя точками). Таким образом, расстояние между двумя различными точками в этом пространстве может быть действительным, нулевым или чисто мнимым. Множество всех преобразований, сохраняющих расстояние между двумя точками в этом псевдоевклидовом пространстве, представляет собой группу; геометрия этой группы и есть специальная теория относительности (в ее кинематической части). Именно, переменная x_0 трактуется как время, x_1, x_2, x_3 — пространственные координаты. Далее, прямые линии трактуются как равномерные движения точек, причем *времениподобные прямые* (для которых расстояние между любыми двумя их точками действительно) представляют собой движения с *досветовыми* скоростями (заметим, что в этой модели скорость света c прини-

мается по величине, равной 1, — иначе нужно было бы определять расстояние формулой $s^2 = c^2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$). Далее, *изотропные прямые* (для которых любые две их точки имеют *нулевое* расстояние) являются траекториями световых частиц. Все световые траектории, проходящие через точку O, образуют *световой конус*, описываемый уравнением $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$. Прямые, соответствующие досветовым движениям, проходят *внутри* этого конуса. Наконец, *пространственноподобные прямые* (для которых расстояние между каждыми двумя их точками является чисто мнимым) соответствуют траекториям *сверхсветовых* частиц («тахионов», с возможностью рассмотрения которых начинают заигрывать физики).

Группа, определяющая эту геометрию (*группа Лоренца*), оставляет инвариантным световой конус (если начало координат неподвижно), и это определяет связь с геометрией Лобачевского и клейновским подходом к ней. В самом деле, связка прямых в этом пространстве, проходящих через начало, задает трехмерное проективное пространство, а линейные преобразования, оставляющие неизменной квадратичную форму $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, преобразуют внутренность светового конуса (т. е. внутренность некоторой поверхности второго порядка — в проективной трактовке) в себя. Это в точности соответствует трехмерной модели Кэли — Клейна гиперболической геометрии. Из этого становится понятным, почему формулы геометрии Лобачевского использовались, например, при расчете серпуховского синхрофазотрона. Трактовка гиперболической геометрии в рамках псевдоевклидова пространства подробно и последовательно проведена в интересной книге: Делоне Б. Н. Элементарное доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского. — М.: Гостехиздат, 1956. О дальнейших вопросах геометрии псевдоевклидовых пространств можно прочитать в интересной статье: Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии//Энциклопедия элементарной математики. — Книга V: Геометрия. — М.: Наука, 1966. — С. 393—475.

168. Русский перевод: Гильберт Д. Основания геометрии. — М.: Гостехиздат, 1948.

169. При всей фундаментальности критических оценок Клейна, основанных на его глубочайшем понимании математики и огромной эрудированности, в его мнениях, разумеется, помимо объективных характеристик есть и субъективные мотивы. Можно соглашаться или не соглашаться с его оценками и трактовками творчества Евклида, Лобачевского, Гильберта и других великих математиков и отмечать расхождения его позиции с общепринятой, но вряд ли целесообразно здесь отмечать эти несогласия — представляют интерес именно взгляды самого Клейна как одного из выдающихся математиков-классиков. Что же касается современных взглядов на историю математики и роль крупнейших ученых с диалектико-математических позиций, следует обратиться, например, к фундаментальным книгам К. А. Рыбникова «История математики».

170. Итак, в этом месте Клейн заканчивает изложение *математической* трактовки вопроса об аксиоматике и обосновании геометрии. Он отмечает два основных направления построения аксиоматики геометрии. Первое из них исходит из понятия

движения, второе — из понятия *конгруэнтности*. Существуют и многие другие подходы к аксиоматизации евклидовой геометрии, связаниые с работами Пиери, В. Ф. Кагаиа, Биркгофа, Вейля и других математиков. Представляется особеиио важиым отметить вейлевский подход (о котором здесь Клейи ие упомииает, поскольку его лекции были прочитаиы в 1908 г., а лекции Вейля, в которых ои предлагает свою аксиоматику, были читаиы им в 1917 г. и вошли в его зиамеиитую киигу «Простраиство, время, материя», издаиную в 1918 г.).

Если гильбертовская аксиоматика иаправлеиа в историческое *прошлое* геометрии и преследует цель дать математически корректное обосиоваие геометрии в духе Евклида (с выходами в иеевклидову, иеархимедову геометрию и др.); если, далее, аксиоматика, базирующаяся иа свойствах движеиий (Клейи, Шур и др.), отказывается от прииятия коигруэитиости (треугольииков) в качестве первоиачальиого поиятия и использует для обосиоваиия геометрии групповой подход, являющийся прогрессивиым завоеваиием математики XIX столетия, — и тем самым иаправлеиа иа *современные* иаучиые иаправлеиия, то вейлевскую аксиоматику можио рассматривать как иаправлеииую в *будущее*. Мотивом для такого заключения является то, что осиовой вейлевской аксиоматики является поиятие векториого простраиства, все более проиикающее во все разделы математики и различиые области ее приложеиий (физика, химия, биология, экоиомика и др.). Более того, такой подход к аксиоматике позволяет устраиить разрыв между школьиой математикой, вузовской математикой и совремеииой математической иаукой.

По существу идеи вейлевской аксиоматики очеиь близки к теме лекций Клейиа. *Точка*, с которой иачииает изложеиие Клейи, является первоиачальиым поиятием и у Вейля. *Свободный вектор*, рассмотреииый Клейиом в качестве одиого из простейших геометрических образов, является первоиачальиым поиятием и у Вейля. Но если Клейи определяет точку тремя ее координатами и вводит вектор иа осиове грассмаиова прииципа, то Вейль считает эти поиятия иеопределяемыми и лишь описывает в аксиомах их осиовиые свойства.

Так же как у Гильберта (и у других авторов), Вейль делит свои аксиомы иа *группы*. Их у иего пять. При формулироваиии аксиом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ озиачают произвольиые векторы, k, l, m — произвольиые числа, A, B, C — произвольиые точки.

I *группа* (аксиомы сложеиия векторов); иеопределяемые поиятия: вектор, сумма двух векторов (также представляющая собой вектор).

I₁) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

I₂) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;

I₃) существует такой вектор $\vec{0}$, что $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

I₄) для любого $\vec{a}$ существует такой вектор $(-\vec{a})$, что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

II *группа* (аксиомы умиожеиия вектора иа число); иеопределяемое поиятие: произведеиие вектора на число (также представляющее собой вектор).

II_1) $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$;

II_2) $1\vec{a} = \vec{a}$;

II_3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;

II_4) $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$.

III *группа* (аксиома размерности). *Определяемые* понятия: линейная зависимость и линейная независимость векторов.

III_1) Существуют три линейно независимых вектора;

III_2) любые четыре вектора линейно зависимы.

IV *группа* (аксиомы скалярного умножения). Неопределяемое понятие: скалярное произведение векторов (представляющее собой число).

IV_1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;

IV_2) $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$;

IV_3) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$;

IV_4) если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\vec{a}\vec{a} > 0$.

V *группа* (аксиомы связи точек и векторов). Неопределяемые понятия: точка; сопоставление каждой упорядоченной паре точек A, B некоторого вектора $\overrightarrow{AB}$.

V_1) Существует хотя бы одна точка;

V_2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;

V_3) для любых A, $\vec{a}$ существует и притом только одна точка B, для которой $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

При первом же взгляде на вейлевскую аксиоматику бросается в глаз, что те свойства векторов, которые *доказываются* при обычном школьном изложении, здесь принимаются за *аксиомы*. Оказывается, что этот прием позволяет сделать построение курса геометрии очень кратким и простым; это — в подлинном смысле «царский путь в геометрию», существование которого по преданию подвергал сомнению Евклид в разговоре с правителем.

Далее, разбиение аксиом на группы имеет очень глубокий смысл. Первую группу составляют аксиомы *абелевой группы*. Иначе говоря, эта группа аксиом постулирует, что множество всех векторов с заданной в нем операцией сложения векторов представляет собой абелеву группу. Первая и вторая группы аксиом вместе означают, что множество всех векторов с имеющимися в нем операциями сложения векторов и умножения векторов на числа представляет собой *векторное пространство* (над полем действительных чисел). Далее, присоединение к первым двум группам *третьей* группы аксиом определяет *трехмерное* векторное пространство. Эта группа очень удобна для дальнейшего обобщения — для введения многомерных (или бесконечномерных) векторных пространств. Именно, заменяя в аксиомах III_1 и III_2 числа 3 и 4 на n и $n + 1$, мы и получаем аксиоматику n-мерного

векторного пространства. Четвертая группа аксиом, вводящая скалярное произведение, приводит к определению евклидова *векторного пространства* — трехмерного, n-мерного или (в бесконечномерном варианте) *гильбертова* пространства. Непосредственный переход от трехмерной геометрии к гильбертову пространству, играющему огромную роль в математике, квантовой физике и других приложениях, т. е. живая связь «школьной» геометрии с современной математикой, — еще одно достоинство вейлевской аксиоматики. Наконец, только в пятой группе аксиом вводятся точки, и мы от теории векторного пространства переходим собственно к геометрии.

Вейлевская аксиоматика позволяет очень просто *определить* прямые, плоскости, параллельность, перпендикулярность и прочие «евклидовы» понятия, причем все построение здания геометрии оказывается простым и кратким. Подробно об изложении геометрии на базе вейлевской аксиоматики можно прочитать в книге В. Г. Болтянского «Элементарная геометрия», указанной в примечании 7.

171. На русском языке имеется издание: Евклид. Начала. — Книги I—VI. — 2-е изд. — М.: Гостехиздат, 1950. — Книги VII—X.—М.: Гостехиздат, 1949. — Книги XI—XV. — М.: Гостехиздат, 1950.

172. Русский перевод: Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века. — 2-е изд. — М.; Л.: ГОНТИ, 1938.

173. В самом деле неравенство $ma > nb$ означает, что $\frac{n}{m} < \frac{b}{a}$. Иначе говоря, рассмотрение всех тех пар целых чисел m, n, для которых имеет место неравенство $ma > nb$, приводит к множеству всех тех (положительных) рациональных чисел $\frac{n}{m}$, которые *меньше* отношения $\frac{a}{b}$. Аналогично, рассмотрение всех тех пар m, n, для которых $ma < nb$, приводит к множеству всех тех рациональных чисел $\frac{n}{m}$, которые *больше* отношения $\frac{a}{b}$. Тем самым отношение $\frac{a}{b}$ определяет «сечение» в множестве рациональных чисел (положительных — других Евклид не знает), причем при $ma > nb$ число $\frac{n}{m}$ принадлежит нижнему классу этого сечения, а при $ma < nb$ — верхнему. Аналогичным образом отношение $\frac{c}{d}$ также определяет некоторое сечение в множестве рациональных (положительных) чисел.

Если теперь неравенство $ma > nb$ имеет место одновременно с неравенством $mc > nd$ (а неравенство $ma < nb$ — одновременно с $mc < nd$), то это означает, что отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ определяют *одно и то же* сечение и, следовательно, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Таким образом, евклидово сравнение отрезков ma и nb по существу означает то же самое, что и рассмотрение соответствую-

щего дедекиндова сечения, а евклидово понимание равенства $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ равносильно совпадению определяемых этими отношениями дедекиндовых сечений.

174. Об общем понятии площади и роли метода исчерпывания можно также прочитать в книге «Третья проблема Гильберта», указанной в примечании 10.

175. Тем более, что смысл слов «то», «часть», «иметь часть» совершенно не ясен (учитывая, что теоретико-множественным стилем мышления Евклид не обладал).

176. В греческом тексте этот постулат формулирован несколько иначе, а именно: «описать из любого центра окружность *любым радиусом*». Однако из дальнейшего евклидова текста (см. с. 306) видно, что этот постулат надо понимать именно в том более узком смысле, который указывается в формулировке Клейна.

177. См. с. 91 русского издания.

178. Например, именно такое идущее от Евклида изложение мы имеем в учебнике геометрии А. П. Киселева, хорошо известном нашим преподавателям, где отдельно рассматриваются две теоремы: «о квадрате стороны, лежащей против острого угла» и соответственно «против тупого». Различие этих случаев связано с тем, что перпендикуляр CD, проведенный из вершины C (вершина угла γ, рис. 132 на с. 309) к противоположной стороне, может проходить либо внутри треугольника, либо вне его, т. е. точка D может принадлежать либо самой противолежащей стороне либо ее продолжению.

179. Ф. Бояи-старший (отец того знаменитого Яноша Бояи, который независимо от Лобачевского и Гаусса пришел к идеям неевклидовой геометрии) — известный венгерский математик. Ему принадлежит теорема (независимо от него доказанная австрийским офицером и любителем математики П. Гервином), *обращающая* известный из древности метод вычисления площади многоугольника разбиением на части и перегруппировкой этих частей (метод равносоставленности). Теорема Бояи — Гервина утверждает, что два многоугольника равной площади (т. е. *равновеликие*) являются *равносоставленными*, т. е. могут быть разбиты на одинаковое число соответственно конгруэнтных частей. Аналогичная теорема справедлива также в геометрии Лобачевского и в римановой геометрии (эллиптической). Гильберту принадлежит интересный пример, показывающий, что в неархимедовой геометрии понятия равновеликости и равносоставленности не являются эквивалентными. См. по поводу этого круга вопросов указанную в примечании 10 книгу В. Г. Болтянского «Третья проблема Гильберта».

Примечательно, что Фаркаш Бояи также много сил потратил на попытки доказательства пятого постулата Евклида. Он отчаялся в своих попытках, и сыну, Яношу, тоже пытался отсоветовать заниматься этой проблемой. В своем письме сыну он писал: «...это может лишить тебя твоего досуга, здоровья, покоя, всех радостей жизни. Эта черная пропасть в состоянии, быть может, поглотить тысячу таких титанов, как Ньютон, на Земле это никогда не прояснится...». Письмо это написано в 1820 г. — в начале десятилетия, когда Лобачевский и Я. Бояи пришли к своему открытию и опубликовали свои исследования!

180. Ряд других примеров имеется в прекрасно написанной книге: Дубнов Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах. — 4-е изд. — М.: Наука, 1969.

181. Здесь Клейн имеет в виду, конечно, такие углы, вторые (свободные) стороны которых проходят над осью x; в общем же случае следует сказать вместо «под стороною» — «между сторонами» другого угла.

182. Иными словами, первый роговидный угол *не превосходит* второго, если пересечение первого угла с достаточно малым кругом, имеющим центр O, содержится во втором роговидном угле.

183. Клейн записывает уравнение этой окружности в виде

$$y = R - \sqrt{R^2 - x^2},$$

а затем разлагает радикал в ряд вблизи точки $x = 0$, что и дает написанное разложение.

184. Это краткое замечание Клейна заслуживает серьезного внимания. В разделе I (на с. 323) Клейн пишет о генетическом методе и апелляции к живому конкретному созерцанию, причем говорит о том, что *в школе* нужно следовать именно этим методам, позволяющим ученику свыкнуться с понятиями геометрии. В то же время здесь в разделе Ic) он несколько пренебрежительно отзывается о «синтетическом» изучении геометрии в духе древних и ратует за изложение геометрии на аналитической основе. К сожалению, Клейн не развивает этот тезис подробнее и, в частности, не отмечает тот рубеж, на котором следует перейти к аналитическому изложению геометрии. Вряд ли следует думать, что Клейн (даже с его глубокой приверженностью к аналитике) рекомендовал сразу же за наглядным введением геометрических понятий переходить к изложению основ аналитической геометрии (тем более, что выше он писал о *постепенном* выдвижении на первый план логических элементов).

В нашей школе таким рубежом можно считать 8-й класс, где вводятся векторы и координаты и, в частности, метрические соотношения в треугольнике выводятся с помощью скалярного произведения и его координатной записи. С этой точки зрения отказ от координатно-векторного метода при изучении начал стереометрии в 9-м классе и возврат к аксиомам соединения точек, прямых и плоскостей (что характерно для учебника А. В. Погорелова) является несомненным регрессом.

185. «Приложение алгебры к геометрии» состоит в том, что фиксируется отрезок, принимаемый за единицу длины, и задаются некоторые отрезки a, b, c, ..., после чего требуется *построить* отрезки, длины которых выражаются в виде $a \pm b$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, $\frac{ab}{c}$, $a^2 - b$, $a^2b + c^2d$ и т. п. (первые четыре из этих выражений имеют измерение 1 относительно a, b, c, и потому при их «построении» единица длины не нужна). Например, чтобы построить прямоугольный треугольник по гипотенузе c и опущенной на нее высоте h можно, конечно, построить на гипотенузе, как на диаметре, полуокружность и затем найти ее пересечения с прямой, отстоящей на расстоянии h от гипотенузы, но можно поступить и иначе: убедиться с помощью вычисления, что катеты искомого треугольника имеют длины $\frac{1}{2}\left(c \pm \sqrt{c^2 - 4h^2}\right)$, затем

«построить» эти выражения и тем самым получить искомый треугольник. В отдельных случаях такой способ построения, возможно, интересен, но в целом специальное изучение «построения» алгебраических выражений, несомненно, является той «боковой веточкой», тем тупиковым направлением исследования, которое уводит в сторону от генеральной линии развития науки и лишь отвлекает интересы учителей и учащихся надуманными проблемами.

Следует отметить, что такие «боковые веточки» время от времени культивируются математиками-методистами, когда они пытаются выйти за рамки своих, несомненно очень важных и актуальных научных проблем, связанных с преподаванием математики, и делают попытки создать вклад в теоретическую математику, исходя не из потребностей математической науки и ее приближений, а из желания обобщить решение школьных задач до уровня математической теории. В качестве примера можно указать «теорию равносильности уравнений», одно время расцветшую в методических руководствах махровым цветом. Речь идет о том, чтобы при решении, например, иррациональных уравнений избегать появления посторонних корней (при возведении обеих частей уравнения в квадрат и других «неравносильных» преобразованиях) добавлением *неравенств*. В результате вместе с последовательным упрощением исходного уравнения оно «обрастает» системой дополнительных неравенств, добавление которых к упрощенному уравнению делает его равносильным исходному уравнению. Все это, разумеется, математически совершенно корректно, но представляет собой «теорию», ненужную и не применяемую нигде, кроме школьной методики, причем «теорию» вовсе не методического, а математического плана (говорящую не о том, *как* обучать, а о том, *чему* обучать). В данном случае получается что-то вроде *теории исключения*, хорошо известной в алгебре многочленов, но перенесенной за границы этой своей естественной области приложимости на иррациональные, тригонометрические и другие выражения, где она теряет интерес и математический смысл.

Объясняется это вполне понятным стремлением учителя математики или методиста внести свой вклад не только в решение педагогических проблем, но и в саму математику. При отсутствии научно обоснованной проблематики и математической эрудиции в научном плане это и приводит к попыткам решения проблем типа великой теоремы Ферма, трисекции угла или к попыткам создания «боковых веточек», о которых пишет Клейн. Винить в этом следует не столько учителя или методиста, сколько математиков-профессионалов и математиков-популяризаторов, не позаботившихся о разработке проблематики, доступной и интересной для широких проблем любителей математики и в то же время представляющей какой-то интерес для современной науки.

186. См. т. 1, с. 78—84 (семиугольник), с. 164—166 (трисекция угла). Следует также заметить, что с чисто методической точки зрения задачи на построение представляют собой прекрасный материал для закрепления теоретического материала (поскольку при поиске решения, при доказательстве и при исследовании приходится пользоваться всем арсеналом ранее изученных теорем), для развития навыков логического мышления и навыков решения нестандартных задач. Не случайно преподаватели математики очень любят задачи на построение и сожалеют о значи-

тельиом снижении удельного веса задач на построение в современной школьной программе. Из лнтературы о геометрических построениях следует отметить прежде всего две книги (обе, к сожалению, давно ие переиздававшиеся): Александров И. И. Сборник геометрических задач на построенне. — М.: Учпедгиз, 1950; Адлер А. Теория геометрических построений. — М.: Учпедгиз, 1940.

187. Здесь Клейн упомннает еще об одной из «боковых веточек», о которых говорнлось в прнмечании 185. Правда, он здесь не так уж резко ее критикует, поскольку выше (на с. 242—243) он нашел изящный способ характеризации геометрии треугольннка с точки зрения проектнвной геометрни. Эта область (геометрия треугольника) владела умамн учителей и любнтелей математикн и в иашей страие (см., например, Зетель С. И. Новая геометрия треугольника. — М.: Учпедгиз, 1962). Иногда по поводу критики геометрии треугольника как тупикового иаправления возражают, отмечая, что в геометрии треугольиика известны теоремы Эйлера, Мёбиуса, Лежандра, Якоби и других выдающихся математиков. Однако эти ученые видели в геометрии треугольника не цель исследования, а побочное поле приложимости созданных ими глубоких теорий. Например, Мёбиус, которого миогократио и охотно цитирует Клейн, получил некоторые новые факты геометрии треугольиика как *приложение* развитого им «барицентрического исчисления», Лагранж и Якоби устаиовнли результаты, относящиеся к геометрии треугольиика, как приложение иовых важиых их исследоваиий о вращательном движенни тел. И даже великий ученый древности Архнмед, которому прннадлежнт теорема о пересечении меднан треугольника в одной точке, пришел к этому результату в виде *приложения* развитого им учения о центрах тяжести.

В связи с этим указанная тематика (геометрия треугольника) представляет интерес для занятий школьного математического кружка не сама по себе, а как повод для рассказа о подлинно важных теориях, относящнхся к геометрии н механике и дающих в виде приложения красивые теоремы геометрии треугольника.

188. Лежандр, так же как Гаусс, Лобачевскнй н Боян, беспрестанно занимался теорней параллельных, но в отличие от ннх не прншел к дерзкой мысли о возможностн построения непротиворечивой геометрни, основанной на отрицании аксиомы параллельности, а до конца жизни не оставлял попыток найти доказательство пятого постулата Евклида. В каждом почти изданин своих «иачал геометрии» Лежандр помещал иовое доказательство евклидова постулата, но внимательный анализ показывал, что оно опиралось иа совершенио «очевидное», явно ие высквзанное предположение, которое эквивалеитно пятому постулату. Однако эти безуспешные попытки доказательства пятого постулатв иельзя призиать бесплодиыми: вместе взятые «доказательства» Лежаидра составили интересное и содержательиое исследование, результатом которого было *нахождение ряда положений, эквивалентных пятому постулату*.

189. Клейн отмечает в этом абзаце, что в гиперболической геометрни сумма углов треугольника *меньше* π. Но окончательиое выяснение этого факта как рвз и связвно с именем Лежандра. Разность $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ иазывают *дефектом* треугольника с углами α, β, γ. В евклидовой геометрии дефект любого треугольника

равен нулю. Легко доказывается и обратное: если дефект любого треугольника равен нулю, то справедлив пятый постулат, т. е. мы находимся в рамках евклидовой геометрии. Лежандр прежде всего доказывает, что если дефект *какого-либо* одного треугольника равен нулю, то и дефект *любого* треугольника равен нулю (и, следовательно, справедлив пятый постулат). Теперь «остается» отыскать какой-нибудь *один* треугольник с нулевым дефектом, т. е. с суммой углов π. Один из приемов, использованных для этого Лежандром, состоит в следующем. Без труда устанавливается, что если треугольник разбит прямой, проходящей через вершину, на два треугольника, то дефект всего треугольника равен *сумме* дефектов составляющих треугольников. Далее, если M — середина отрезка OA и если луч, исходящий из точки O, пересекает перпендикуляры к прямой OA, проведенные через M и A, в точках N и B, то дефект треугольника OAB больше, чем удвоенный дефект треугольника OMN. Используя эту лемму, Лежандр проводит рассуждение следующим образом. Возьмем прямоугольный треугольник OMN с вершиной прямого угла M, и пусть ε — его дефект. Допустим, что $\varepsilon > 0$. Отложив на прямой OM от точки M отрезок, равный OM (т. е. взяв такую точку A, что M — середина отрезка OA), проведем перпендикуляр к прямой OM, проходящий через точку A, и обозначим через B его точку пересечения с прямой ON. Тогда по сформулированной выше лемме дефект треугольника OAB больше 2ε. Но теперь, исходя из треугольника OAB, мы точно таким же образом сможем получить треугольник, имеющий дефект $> 4\varepsilon$, затем треугольник с дефектом $> 8\varepsilon$ и вообще треугольник, дефект которого больше $2^n\varepsilon$. Но так как дефект любого треугольника не превосходит π, то мы получаем противоречие, которое и означает, что неравенство $\varepsilon > 0$ невозможно. Итак, должно быть $\varepsilon = 0$, и тем самым Лежандр считает, что найден треугольник с нулевым дефектом, т. е. пятый постулат Евклида доказан.

Ошибка здесь состоит в том, что Лежандр неявно использовал следующее предложение: пусть MON — произвольный острый угол и A^* — произвольная точка луча OM; тогда перпендикуляр к прямой OM, проведенный через точку A^*, непременно пересекает луч ON. Кажущаяся «очевидность» этого предложения, разумеется, не является основанием для возможности его использования при доказательстве пятого постулата. В действительности это предложение является ***эквивалентом*** пятого постулата.

Разумеется, для человека, знакомого с геометрией Лобачевского, ошибка совершенно очевидна. Но выявление этого эквивалента пятого постулата *до* создания гиперболической геометрии представляет собой совершенно нетривиальное достижение. Этот и другие эквиваленты пятого постулата, открытые Лежандром (один из них Клейн упоминает ниже), сыграли определенную роль в открытии Лобачевским его геометрии. Таким образом, роль лежандровской теории параллельных не следует недооценивать.

Для сравнения заметим, что в модели Кэли — Клейна перпендикулярность прямых (как и вообще величина угла) интерпретируется не очень просто и иллюстрация этого эквивалента пятого постулата в общем случае не слишком проста. Однако если рассматриваемое коническое сечение представляет собой окружность, O — ее центр (т. е. прямая OM изображается в этой модели *диаметром* окружности), то перпендикулярность прямой OM и неко-

торой другой прямой интерпретируется перпендикулярностью в обычном евклидовом смысле (это следует из соображений симметрии). Следовательно, если ON — луч, образующий с OM острый угол, а N_∞ — точка пересечения луча ON с абсолютом (окружностью), то перпендикуляр, проведенный (в евклидовом смысле) к прямой OM из точки N_∞, пересекает OM в некоторой точке A_1, обладающей следующим замечательным свойством. Если A_* — точка прямой OM, лежащая за A_1 (т. е. A_* — такая точка, лежащая внутри окружности, что A_1—*внутренняя* точка отрезка OA_*), то перпендикуляр, проведенный через точку A_* к прямой OM, *не пересекается* с ON в модели Кэли — Клейна, т. е. точка пересечения этого перпендикуляра с прямой ON лежит *вне* окружности (абсолюта). Это и показывает, что в геометрии Лобачевского лежандрово предложение места не имеет, и, следовательно, оно представляет собой эквивалент пятого постулата.

190. Русский перевод учебников, представляющих переработку не только «Геометрии», но и «Арифметики» и «Алгебры» Бореля, был издан под редакцией проф. В. Ф. Кагана в 1911 г. и переиздан в 1923 г.

191. Здесь и далее «равен» понимается в смысле «равен по площади» (в этом смысле используется теперь более удобный термин «равновелик»).

Феликс Клейн

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА
С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ВЫСШЕЙ

Том второй
ГЕОМЕТРИЯ

Редактор *В. В. Донченко*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *С. Я. Шкляр*
Корректоры *О. А. Сигал* и *Н. Д. Дорохова*

ИБ № 12996

Сдано в набор 16.01.87. Подписано к печати 23.06.87. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 21,84. Усл. кр.-отт. 21,84. Уч.-изд. л. 22,9. Тираж 95 000. экз. Заказ 428. Цена 1 р. 40 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы 117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения „Техническая книга" им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29